Prof. dr. Mirela PRAISLER,

Conf. dr. Alexandrina NAT

FIZICĂ

VOLUMUL II

- 2005 -

CUPRINS

ELECTROMAGNETISM

CAP.1 ELECTROSTATICA 3

1.1 Marimi principale în electrostatica 3

1.2 Lucrul mecanic al fortelor unui câmp electric 5

1.3 Legea lui Gauss 6

1.4 Legi de material 7

1.4.1 Legea dependentei polarizatiei electrice de câmpul electric 7

7.4.2 Legea dependentei inductiei electrice de câmpul electric 7

CAP.2 ELECTROCINETICA 9

2.1 Marimi principale în electrocinetica 9

2.2 Legea de continuitate 10

2.3 Legi de material 12

2.3.1 Legea lui Ohm 12

CAP.3 MAGNETOSTATICA 15

3.1 Marimi principale în magnetostatica 15

3.2 Formula lui Biot-Savart-Laplace 17

3.3 Legi de material 18

3.3.1 Legea fluxului magnetic 18

3.3.2 Legea circuitului magnetic 18

3.3.3 Legea magnetizatiei temporare 19

CAP.4 REGIMUL VARIABIL 20

4.1 Legile regimului variabil 20

4.1.1 Legile de stare ale câmpului electromagnetic 20

4.1.2 Legile de evolutie ale câmpului electromagnetic 21

4.2 Ecuatiile de trecere pentru câmpul electromagnetic la suprafata de separatie dintre doua medii diferite 24

4.3 Conservarea energiei câmpului electromagnetic 26

4.4 Unde electromagnetice 28

4.5 Transversalitatea undelor electromagnetice 30

4.5 Potentiale electrodinamice 31

TEORIA ELECTROMAGNETICA A LUMINII

CAP.5 TEORIA ELECTROMAGNETICA A LUMINII 35

5.1 Polarizarea luminii 36

5.2 Reflexia si refractia luminii 37

5.2.1 Legea reflexiei si refractiei luminii 37

5.2.2 Formulele lui Fresnel 39

CAP.6 INTERFERENTA LUMINII 44

6.1 Principii ale interactiei undelor 44

6.2 Modele de analiza a interferentei optice 45

6.2.1 Interferenta a doua unde generate de o sursa punctuala 45

6.2.2 Interferenta a doua unde monocromatice 46

6.2.3 Interferenta multipla 48

6.2.4 Dispozitive interferentiale 50

FIZICA NUCLEARA

CAP.7 FIZICA NUCLEARA 58

7.1 Particule fundamentale 58

7.2 Principalele caracteristici ale nucleului atomic 58

7.3 Modele nucleare 59

7.3.1 Modelul gazului Fermi 59

7.3.2 Modelul nuclear în paturi 60

7.3.3 Modelul hidrodinamic al nucleului 60

7.3.4 Modelul generalizat al nucleului 61

7.4 Legile transformarilor radioactive 61

7.4.1 Legea deplasarii a lui Fajans-Soddy 61

7.4.2 Legea dezintegrarii radioactive 61

7.4.3 Dezintegrarea α 62

7.4.4 Dezintegrarea β 63

7.4.5 Radiatia γ 64

7.4.6 Radioactivitatea artificiala 65

7.5 Reactii nucleare 66

7.5.1 Energia de dezintegrare nucleara 66

7.5.2 Mecanismul reactiilor nucleare 67

7.5.3 Reactii nucleare cu particule încarcate 68

7.5.4 Reactii nucleare cu particule neutre 69

7.5.5 Fisiunea nucleara 70

7.5.6 Fuziunea nucleara 72

BIBLIOGRAFIE 75

ELECTROMAGNETISM

CAPITOLUL 1. Electrostatica

1.1 Marimi principale în electrostatica

Electrostatica este acea parte a electromagnetismului care se ocupa cu fenomenele electrice produse de sarcinile electrice aflate în repaus în raport cu un sistem de referinta inertial.

Aceste fenomene pot fi evidentiate prin aparitia unor forte si momente determinate de anumite interactiuni specifice. Din acest punct de vedere, se deosebesc doua stari distincte ale corpurilor:

- electrizarea - apare în urma încarcarii corpurilor cu sarcini electrice; se manifesta prin aparitia unor forte de interactiune care nu depind de orientarea relativa a corpurilor electrizate.
- polarizarea - consta în aparitia unor asimetrii în distributia sarcinilor; se evidentiaza prin aparitia unor cupluri de forte ce se acumuleaza pentru o anumita orientare a corpurilor electrizate.

a) *Câmpul electric* este purtatorul material al interactiunilor electrice. Este un câmp vectorial si este parte componenta a câmpului electromagnetic.

b) *Sarcina electrica* este o marime scalara ce masoara starea de încarcare si caracterizeaza proprietatea corpurilor de a crea un câmp electric sau de a fi actionate atunci când sunt introduse în câmpul electric al altor corpuri.

Sarcina elementara este a electronului e = $-1{,}6\cdot10^{-19}$ C; este o constanta universala. Dupa elementul din spatiu în care este repartizata sarcina electrica, se poate defini:

- densitate volumica de sarcina - în cazul în care sarcina este repartizata într-un volum τ:

$$\rho = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta\tau}=\frac{dq}{d\tau} \qquad (1.1)$$

- densitate superficiala de sarcina - în cazul în care sarcina este repartizata pe o suprafata S:

$$\sigma = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S}=\frac{dq}{dS} \qquad (1.2)$$

- densitate liniara de sarcina - în cazul în care sarcina este repartizata pe o curba Γ:

$$\lambda = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta\Gamma}=\frac{dq}{d\Gamma} \qquad (1.3)$$

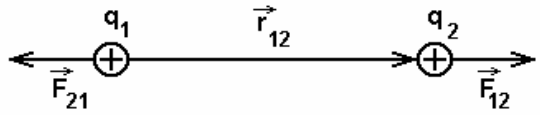


Figura1.1

c) *Legea lui Coulomb*

Forta de interactiune dintre doua sarcini punctiforme este proportionala produsul sarcinilor si invers proportionala cu patratul distantei ce le separa, depinzând si de mediul în care se afla sarcinile. Directia acestor forte este pe dreapta ce uneste sarcinile, iar sensul ei depinde de semnul sarcinilor. În Figura 1.1 a fost reprezentat cazul în care cele doua sarcini sunt pozitive. Expresia vectoriala este:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12} \qquad (1.4)$$

unde ε este permitivitatea absoluta a mediului în care se afla sarcinile si este data de: $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, cu $\varepsilon_0 = 8{,}84 \cdot 10^{-12}$ F/m, permitivitatea vidului si ε_r permitivitatea relativa a mediului respectiv, în raport cu cea a vidului (adimensionala). Se vede ca $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ sau în modul: $F_{12} = F_{21}$.

d) *Intensitatea câmpului electric* este o marime vectoriala, functie de punct, ce caracterizeaza local câmpul electric, prin interactiunile ce le produce. Aceste interactiuni sunt evidentiate prin intermediul unui corp de proba (corp bun conducator, slab încarcat electric, de dimensiuni reduse si având sarcina constanta în timp). Intensitatea câmpului electric este egala cu raportul dintre forta $\vec{F}$ care se exercita asupra corpului de proba si sarcina lui q, când aceasta din urma tinde catre zero:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \qquad (1.5)$$

e) *Liniile de câmp electric* sunt curbe tangente în fiecare punct la directia locala a vectorului $\vec{E}$. Sensul lor se alege astfel încât pleaca de la sarcinile pozitive spre cele negative, deci liniile câmpului electric sunt curbe deschise.

f) *Momentul electric* este o marime vectoriala care masoara starea de polarizare a corpurilor. Pentru o sarcina punctiforma q într-un punct având vectorul de pozitie $\vec{r}$ fata de o origine 0 aleasa arbitrar, momentul electric al sarcinii în raport cu 0 este:

$$\vec{p} = q\vec{r} \qquad (1.6)$$

sau pentru un ansamblu de n sarcini punctiforme:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r}_i \qquad (1.7)$$

Se defineste dipolul electric ca fiind un ansamblu de doua sarcini punctiforme, egale de semne opuse, situate la distanta l fixa (Figura 1.2).

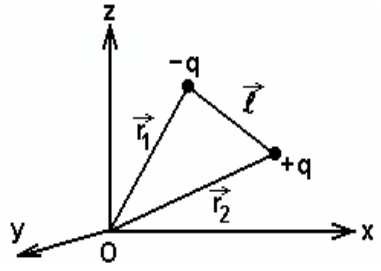


Figura 1.2

Atunci momentul electric dipolar va fi conform (1.7)

$$\vec{p}_d = \sum_{i=1}^{2} q_i \vec{r}_i = -q\vec{r}_1 + q\vec{r}_2 = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = q\vec{l} \qquad (1.8)$$

unde

$$\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (1.9)$$

În cazul dielectricilor, starea de polarizare este caracterizata de momentul electric $\vec{p}$, definit prin intermediul cuplului de forte $\vec{c}$ care actioneaza asupra dielectricului plasat într-un câmp electric $\vec{E}$, astfel încât:

$$\vec{c} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad (1.10)$$

sau, în modul:

$$c = pE\sin\alpha \qquad (1.11)$$

unde α este unghiul dintre $\vec{p}$ si $\vec{E}$.

Asa cum polarizarea poate fi permanenta sau temporala, tot asa exista un moment electric permanent ($\vec{p}_p$) si unul temporar ($\vec{p}_t$), deci momentul electric total al corpului este:

$$\vec{p}_p = \vec{p}_p + \vec{p}_t \qquad (1.12)$$

g) *Polarizatia electrica* este o marime vectoriala egala cu limita raportului dintre momentul electric $\Delta\vec{p}$ al unui element de volum $\Delta\tau$ si acest volum:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\tau} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} \qquad (1.13)$$

adica este momentul electric al unitatii de volum.

h) *Inductia electrica* este o marime vectoriala, depinzând de pozitie, care caracterizeaza local câmpul electric functie de sarcina electrica generatoare de câmp. Expresia inductiei electrice este:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad (1.14)$$

i) *Fluxul inductiei electrice* printr-o suprafata elementara orientata $d\vec{S}$ este:

$$d\Phi_e = \vec{D}d\vec{S} \qquad (1.15)$$

iar fluxul total printr-o suprafata închisa Σ va fi:

$$\Phi_e = \oint_{\Sigma} \vec{D}\,d\vec{S} = \oint_{\Sigma} D\,dS\cos\alpha = \oint_{\Sigma} D_n dS \qquad (1.16)$$

în care α este unghiul dintre $\vec{D}$ si versorul $\vec{n}$ al directiei normale la suprafata orientata $d\vec{S}$, iar $D_n = D\cdot\cos\alpha$ este componenta inductiei electrice dupa directia $\vec{n}$.

1.2. Lucrul mecanic al fortelor unui câmp electric

Lucrul mecanic elementar al fortelor electrice $\vec{F}$ care, actionând asupra unei sarcini elementare q determina o deplasare elementara $d\vec{l}$ este:

$$\delta W = \vec{F}\,d\vec{l} = q\vec{E}\,d\vec{l} \qquad (1.17)$$

Prin integrare, se obtine lucrul mecanic total pe o curba Γ:

$$W = q\int_{\Gamma} \vec{E}d\vec{l} \qquad (1.18)$$

În regim electrostatic nu au loc schimburi de caldura nici între sistem si exterior si nici în interiorul sistemului. Din termodinamica se stie ca în acest caz lucrul mecanic nu depinde de drumul parcurs, deci în cazul unei curbe închise Γ, rezulta:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = 0 \qquad (1.19)$$

Integrala de contur se poate transforma într-o integrala pe suprafata pe o suprafata Γ, folosind teorema lui Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{E}) d\vec{S} \qquad (1.20)$$

Cum elementul de suprafata $d\vec{S}$ este ales arbitrar, rezulta:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad (1.21)$$

deci în acest caz câmpul electric este irotational. Dar $\nabla \times (\nabla f) = 0$ unde f este o functie scalara oarecare, înseamna ca exista o functie scalara V, astfel încât:

$$\vec{E} = -\nabla V \qquad (1.22)$$

Marimea V(x, y, z) definita de (1.22) se numeste potential electric, fiind definit pâna la o constanta arbitrara. Atunci lucrul mecanic total, la o deplasare pe curba Γ, între punctele 1 si 2 este:

$$W = -q\int_{\Gamma} \nabla V d\vec{l} = -q\int_{1}^{2} dV = q\,(V_1 - V_2) = qU \qquad (1.23)$$

Marimea U se numeste *tensiune electrica*. Din (1.23) se vede ca tensiunea electrica este egala cu lucrul mecanic necesar deplasarii unei sarcini egale cu unitatea, între punctele considerate.

1.3 Legea lui Gauss

Fluxul inductiei electrice $\vec{D}$ printr-o suprafata închisa $\sum$ este egal cu suma algebrica a sarcinilor electrice libere q_1, ..., q_n, din interiorul acestei suprafete.

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} d\vec{S} = q \qquad (1.24)$$

unde $q = \sum_{i=1}^{n} q_i$. Demonstratie: Fie doua sarcini q si q', între care exista forta:

$$\vec{F} = \frac{1}{4pp} \cdot \frac{qq'}{r^3} \cdot \vec{r} \qquad (1.25)$$

iar câmpul electric creat de sarcina q este:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^3} \vec{r} \qquad (1.26)$$

Fluxul inductiei electrice $\vec{D}$ printr-o suprafata sferica, cu centrul în q:

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} d\vec{S} = \varepsilon \oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S} \qquad (1.27)$$

Dar $\vec{r}$ si $d\vec{S}$ au aceeasi directie, deci: $\vec{r}\, d\vec{S} = r\, dS$; în acest caz, pentru un r dat relatia (1.27) devine:

$$\oint_{\Sigma} \vec{D}\, d\vec{S} = \frac{q}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2 = q \qquad (1.28)$$

Legea lui Gauss (relatia 1.24) poate fi scrisa si sub forma diferentiala, folosind *relatia lui Gauss-Ostrogradski*:

$$\oint_{\Sigma} \vec{D}\, d\vec{S} = \int_{\tau} \nabla \vec{D} d\tau \qquad (1.29)$$

unde τ este volumul marginit de suprafata $\sum$. Daca ρ este densitatea volumica de sarcina, tinând cont de relatia (1.1), din relatia (1.29) se obtine:

$$\nabla \vec{D} = \rho \qquad (1.30)$$

Având în vedere relatiile (1.14) si (1.22), din (1.30) rezulta:

$$\nabla (\nabla V) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{sau} \quad \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (1.31)$$

Ecuatia (1.31) este *ecuatia lui Poisson*. Daca $\rho = 0$, rezulta *ecuatia lui Laplace*:

$$\Delta V = 0 \qquad (1.32)$$

1.4. Legi de material

1.4.1. Legea dependentei polarizatiei electrice de câmpul electric

S-a constatat experimental ca exista o dependenta între polarizatia totala $\vec{P}$ a unui dielectric si intensitatea câmpului electric $\vec{E}$. Deoarece polarizatia permanenta ($\vec{P}_p$) nu depinde de câmpul exterior, rezulta ca doar polarizatia temporara depinde de $\vec{E}$:

$$\vec{P}_t = \vec{P}_t(\vec{E}) \qquad (1.33)$$

- În medii liniare, omogene si anizotrope, relatia generala (1.33) este:

$$\vec{P}_t = \varepsilon_0 \, \tilde{\chi}_e \, \vec{E} \qquad (1.34)$$

unde ε_0 este permitivitatea electrica a vidului, iar $\tilde{\chi}_e$ tensorul susceptivitatii electrice.

- În medii liniare, omogene si izotrope, tensorul $\tilde{\chi}_e$ devine scalarul χ_e:

$$\vec{P}_t = \varepsilon_0 \, \chi_e \, \vec{E} \qquad (1.35)$$

Astfel, în acest caz, vectorii $\vec{P}_t$ si $\vec{E}$ sunt paraleli.

1.4.2. Legea dependentei inductiei electrice de câmpul electric

Aceasta lege este:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_p + \vec{P}_t(\vec{E}) \qquad (1.36)$$

Daca mediul nu este polarizat permanent, $\vec{P}_p = 0$. În plus, pentru medii liniare, omogene si anizotrope:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \tilde{\chi}_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \tilde{\chi}_e) \vec{E} \qquad (1.37)$$

Daca se noteaza $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 (1 + \tilde{\chi}_e)$, unde $\tilde{\varepsilon}$ este *tensorul permitivitatii absolute a mediului*, relatia (1.37) devine:

$$\vec{D} = \tilde{\varepsilon} \, \vec{E} \qquad (1.38)$$

În medii liniare, omogene si izotrope, tensorul $\tilde{\varepsilon}$ devine scalarul ε si atunci relatia (1.39) va fi:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad (1.39)$$

de unde se vede ca, în acest caz, vectorii $\vec{D}$ si $\vec{E}$ sunt paraleli. Din relatia (1.38) scrisa sub forma scalara si din relatia (1.5), rezulta ca *permitivitatea electrica relativa* este $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$.

PROBLEME

1. Trei sarcini punctiforme de 2 x 10^{-9}C sunt asezate în trei din colturile unui patrat cu latura de 0,2 m. Care sunt marimea si directia fortei rezultante care actioneaza asupra unei sarcini punctiforme de -10^{-9}C când aceasta este plasata: a) în centrul patratului; b) în coltul liber al patratului?

2.Când bornele unei baterii de acumulatori de 100V sunt conectate la doua placi paralele de dimensiuni mari, aflate la distanta de 1 cm una de alta, în spatiul dintre placi câmpul electric este aproape uniform, de intensitate E=10^4N/C. Sa presupunem ca avem un câmp de aceasta intensitate, cu directia verticala, în sus.

a) Sa se calculeze forta care actioneaza asupra unui electron în acest câmp si sa se compare aceasta forta cu greutatea electronului. Se stie ca sarcina electronului este e = 1,6x10^{-19}C si masa electronului este m = 9,1x10^{-31}Kg.

b) Ce viteza va avea electronul dupa parcurgerea distantei de 1 cm, daca a pornit din repaos? Ce energie cinetica va avea? Cat timp i-a trebuit pentru a avea aceasta energie?

c) Daca electronul este proiectat în câmp cu viteza orizontala, aflati ecuatia traiectoriei lui.

Raspuns:

a) $F_{el} = eE = 1,6 \times 10^{-15}$N

$G = mg = 8,9 \times 10^{-30}$N

$F_{el} / G = 1,8 \times 10^{14}$

deci greutatea electronului este neglijabila în raport cu forta electrica ce actioneaza asupra electronului.

b) $a = \frac{F_{el}}{m} = 1,8 \times 10^{15}$ m/s^2 $\quad v = \sqrt{2ax} = 6 \times 10^6$ m/s

$E_c = \frac{mv^2}{2} = 1,6 \times 10^{-17}$J $\quad t = \frac{v}{a} = 3,3 \times 10^{-9}$ s.

c) Pe directia orizontala miscarea este uniforma cu viteza v, iar pe directie verticala miscarea este uniform accelerata cu acceleratia a. Sensul miscarii este în jos, deci în sensul negativ al axei Oy. Deci:

$x = v_0 t \qquad y = -\frac{F_{el} t^2}{2m} \qquad \Rightarrow \quad y = -\frac{F_{el}}{2mv_0^2} x^2$

3. Potentialul electric în afara unui cilindru conductor încarcat, de raza R, având pe unitatea de lungime o sarcina ?, este $V = 2k? \cdot \ln\frac{R}{r} = 2k?(\ln R - \ln r)$. Sa se determine intensitatea câmpului electric radial ce corespunde acestui potential electric.

Raspuns:

$$E = -\frac{dV}{dr} = \frac{2kl}{r}$$

CAPITOLUL 2. Electrocinetica

2.1 Marimi principale în electrocinetica

Electrostatica este acea parte a electrocineticii care se ocupa cu studiul regimului dinamic al sarcinilor electrice si, în mod deosebit, cu miscarea lor ordonata în spatiu, miscare care determina curentul electric.

Curentul de conductie reprezinta deplasarea ordonata a sarcinilor electrce libere într-un conductor; în afara de acesta, mai exista si curentul de conventie care este dat de deplasarea corpurilor electrizate (conductori sau dielectrici) în spatiu. Deplasarea este însotita si de un flux de masa, deci curentul electric de conductie este caracterizat de marimi care reflecta atât transportul de sarcina, cât si de masa.

a) *Densitatea curentului de conductie* $\vec{j}$ este un vector a carui marime este egala în fiecare punct cu sarcina care trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafata normala la directia de deplasare si al carui versor coincide cu versorul vitezei medii de deplasare a particulelor:

$$\vec{j} = \frac{d}{dS_n}\left(\frac{dq}{dt}\right)\frac{\vec{v}}{v} \qquad (2.1)$$

Volumul elementar transferat de sarcina dq în timpul dt este:

$$d\tau = dS_n\, v\, dt \qquad (2.2)$$

Atunci (2.1) se poate scrie:

$$\vec{j} = \frac{dq}{d\tau}\vec{v} = \rho\vec{v} \qquad (2.3)$$

unde ρ este *densitatea volumica de sarcina*.

b) *Intensitatea curentului de conductie* I care trece prin suprafata $\sum$ este fluxul densitatii de curent prin aceasta suprafata:

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j}d\vec{S} = \int_{\Sigma} \vec{j}dS_n \qquad (2.4)$$

si este egal cu sarcina care trece în unitatea de timp prin suprafata $\sum$:

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (2.5)$$

c) *Densitatea fluxului de masa* $\vec{j}_m$ este vectorul a carui marime este egala în fiecare punct cu masa care trece în unitatea de timp prin suprafata normala la directia de deplasare si al carui versor coincide cu versorul vitezei medii de deplasare a particulelor:

$$\vec{j}_m = \frac{d}{dS_n}\left(\frac{dm}{dt}\right)\frac{\vec{v}}{v} = \frac{dm}{d\tau}\vec{v} = \rho_m\vec{v} \qquad (2.6)$$

unde ρ_m este densitatea masica.

d) *Liniile de curent* sunt curbe tangente în fiecare punct la directia locala a vectorului $\vec{j}$ si ecuatia lor este data de:

$$\frac{dx}{j_x} = \frac{dy}{j_y} = \frac{dz}{j_z} \qquad (2.7)$$

unde j_x, j_y, j_z sunt componentele vectorului $\vec{j}$.

2.2 Legi de continuitate

2.2.1. Ecuatia de continuitate a masei

Ecuatia de continuitate este expresia matematica a legii conservarii masei în mecanica mediilor continue. Miscarea unui punct material este descrisa prin dependenta de timp a coordonatelor sale x_i (i =1,2,3) fata de un sistem de coordonate considerat fix si depinde si de pozitia sa initiala, data de valorile X_i (i=1,2,3), la momentul initial:

$$x_i = x_i (X_i, t_0) \qquad (2.8)$$

Se considera ca functiile care intervin în legea de miscare (2.8) sunt continue si derivabile, iar între marimile x_i si X_i exista o corespondenta biunivoca:

$$X_i = X_i (x_i, t) \qquad (2.9)$$

Aceasta înseamna ca jacobianul transformarii (2.8) este diferit de zero:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.10)$$

Deci, evolutia sistemului în cadrul descrierii spatiale este data de cunoasterea unui ansamblu de functii de forma:

$$f = f (x_i , t) \qquad (2.11)$$

cu i= 1,2,3, corespunzatoare punctului material, care la momentul t ocupa pozitia x_i.

De exemplu, viteza punctului material la momentul t, care initial ocupa pozitia data de x_i, este:

$$v_i = \dot{x}_i = \frac{d}{dt} x_i (x_i, t) \qquad (2.12)$$

iar acceleratia este:

$$a_i = \ddot{x}_i = \frac{d^2}{dt^2} x_i (x_i, t) \qquad (2.13)$$

Atunci, în cazul general al functiei f, derivata (partiala sau totala) a câmpului marimii f (x_i, t) va fi data de:

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\, f \qquad (2.14)$$

Ecuatia (2.14) e valabila doar daca functia f este scalara. Daca $\vec{f}$ este o marime vectoriala, atunci (2.14) se va scrie:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{f} \qquad (2.15)$$

în care:

$$(\vec{v}\nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (2.16)$$

De exemplu, pentru $\vec{f} = \vec{v}$, rezulta:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} \qquad (2.17)$$

Considerând ca un volum τ, marginit de suprafata $\sum_0$ cuprinde masa m, atunci variatia acestuia în timp va fi:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\tau \rho_m \, d\tau \qquad (2.18)$$

unde ρ_m este o functie scalara - densitate masica - si care depinde de punct si timp:

$$\rho_m = \rho_m (\vec{r}, t) \qquad (2.19)$$

Cum volumul τ variaza el însusi în timp odata cu deplasarea particulelor, operatorul de derivare din (2.18) nu poate intra sub integrala. De aceea, trecând la coordonatele materiale, volumul τ trece în volumul τ_0 fix, între care exista legatura:

$$d\tau = J \, d\tau_0 \qquad (2.20)$$

unde J este determinantul dat de (2.10). În acest caz, relatia (2.18) devine:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int_t ?_m(x,t)\,dt = \frac{d}{dt}\int_{t_0} ?_m[x(X,t),t]\,J\,dt_0$$

$$\frac{dm}{dt} = \int_{t_0} (?_m J + ?_m \dot{J})\,dt_0 \qquad (2.21)$$

Conform teoremei lui Euler, rezulta ca:

$$\dot{J} = J\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) = J \, \text{div}\, \vec{v} \qquad (2.22)$$

Atunci, folosind (2.20) si (2.22), relatia (2.21) devine:

$$\frac{dm}{dt} = \int_\tau (\dot{\rho}_m + \rho_m \, \text{div}\, \vec{v})\, d\tau \qquad (2.23)$$

Deoarece masa m este constanta în timpul miscarii (dm/dt = 0), iar volumul τ este ales arbitrar, rezulta:

$$\frac{d\rho_m}{dt} + \rho_m \, \text{div}\, \vec{v} = 0 \qquad (2.24)$$

ceea ce reprezinta ecuatia de continuitate. Conform (2.14), se mai poate scrie:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{v}\nabla\rho_m + \rho_m \nabla \vec{v} = 0 \qquad (2.25)$$

sau întrucât $\nabla(\rho_m \vec{v}) = \rho_m \nabla \vec{v} + \vec{v}\,\nabla\rho_m$, rezulta:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla(\rho_m \vec{v}) = 0 \qquad (2.26)$$

Relatiile (2.24), (2.25) si (2.26) sunt expresii echivalente ale ecuatiei de continuitate.

2.2.2. Ecuatia de continuitate a sarcinii electrice

Ecuatia de continuitate este expresia matematica a legii de conservare a sarcinii electrice în regim dinamic. Sarcina totala dintr-un volum τ fiind $q = \int_{\tau} \rho \, d\tau$, unde ρ este *densitatea volumica de sarcina*, rezulta:

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau} \rho \, d\tau = 0 \qquad (2.27)$$

Legea de continuitate (2.26) ramânând valabila, se poate scrie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \qquad (2.28)$$

sau, tinând cont de (2.3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0 \qquad (2.29)$$

care reprezinta *ecuatia de continuitate*. Având în vedere legea lui Gauss, relatia (2.29) se mai poate scrie:

$$\nabla\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right) = 0 \qquad (2.30)$$

ceea ce arata ca exista un câmp de vectori:

$$\vec{j}_t = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (2.31)$$

numit *densitatea curentului total*, cu proprietatea:

$$\nabla \vec{j}_t = 0 \qquad (2.32)$$

Densitatea curentului total este formata din densitatea curentului de conductie $\vec{j}$ (cu proprietatea $\vec{j} \neq 0$ doar în conductoare) si densitatea curentului de deplasare $\vec{j}_d$:

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (2.33)$$

(cu proprietatea $\vec{j}_d \neq 0$ doar în dielectrici). Fluxul vectorului $\vec{j}_t$ printr-o suprafata Σ reprezinta *intensitatea curentului total*:

$$I_t = \int_{\Sigma}\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S} = I + I_d \qquad (2.34)$$

unde I este *intensitatea curentului de conductie* si I_d *intensitatea curentului de deplasare* (datorat variatiei inductiei electrice $\vec{D}$ în timp).

2.3 Legi de material

2.3.1. Legea lui Ohm

Legea lui Ohm face legatura dintre densitatea curentului de conductie si intensitatea câmpului electric din conductori. Curentul electric de conductie poate sa circule numai în cazul în care câmpul electric din conductor este nenul si constant în timp. Circuitele de curent sunt, în general, închise iar sarcinile libere sunt actionate de forte coulombiene (electrostatice) si de forte exterioare (neelectrostatice). Acestea din urma sunt rezultatele efectelor electrochimice, termoelectrice, mecanoelectrice, etc., iar densitatea lor de volum $\vec{f}_i$ poate fi scrisa:

$$\vec{f}_i = \rho \vec{E}_i \qquad (2.35)$$

unde $\vec{E}_i$ este intensitatea câmpului electric imprimat (care exprima efectele actiunii fortelor exterioare).

Câmpul electric imprimat este creat de surse de tensiune electromotoare (pile, acumulatori, dinamuri, etc.). *Câmpul electric total* $\vec{E}_t$ dintr-un conductor parcurs de curent continuu este:

$$\vec{E}_t = \vec{E} + \vec{E}_i \qquad (2.36)$$

unde $\vec{E}$ este intensitatea câmpului electric coulombian.

- În medii liniare, omogene si anizotrope, exista dependenta între $\vec{j}$ si $\vec{E}_t$:

$$\vec{j} = \tilde{\sigma}\vec{E}_t = \tilde{\sigma}\left(\vec{E} + \vec{E}_i\right) \qquad (2.37)$$

unde $\tilde{\sigma}$ este tensorul conductivitatii electrice a mediului.

- În medii liniare, omogene si izotrope, tensorul $\tilde{\sigma}$ devine scalarul σ si atunci relatia (2.37) va fi:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}_t = \sigma\,(\vec{E} + \vec{E}_i) \qquad (2.38)$$

ceea ce reprezinta legea lui Ohm pentru astfel de medii.

Se defineste rezistivitatea mediului:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \qquad (2.39)$$

Se înlocuieste (2.39) în (2.38) si se integreaza pe o portiune de circuit cuprinsa între punctele 1 si 2:

$$\int_1^2 \rho\vec{j}\,d\tilde{\ell} = \int_1^2 \vec{E}d\tilde{\ell} + \int_1^2 \vec{E}_i\,d\tilde{\ell} \qquad (2.40)$$

unde $d\tilde{\ell}$ este vectorul având modulul egal cu elementul de lungime $d\ell$ al circuitului, orientat dupa tangenta la conductor, în acelasi sens cu $\vec{j}$. Relatia (2.40) este *legea lui Ohm în forma globala*, între punctele considerate.

Întrucât $\vec{E}$ este un câmp potential ($\vec{E}$ = - grad V), rezulta:

$$\int_1^2 \vec{E}d\tilde{\ell} = V_1 - V_2 \qquad (2.41)$$

Cea de-a doua integrala din (2.40) este:

$$E_{12} = \int_1^2 \vec{E}_i\,d\tilde{\ell} \qquad (2.42)$$

si defineste tensiunea electromotoare (între punctele 1 si 2 ale circuitului) care este egala cu lucrul mecanic al fortelor exterioare necesar deplasarii unitatii de sarcina pozitiva pe portiunea considerata.

Tensiunea electrica U_{12} (între punctele 1 si 2) este marimea numeric egala cu lucrul mecanic total al fortelor coulombiene si exterioare pentru a deplasa unitatea de sarcina pozitiva între aceste puncte:

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E}d\tilde{\ell} + \int_1^2 \vec{E}_i\,d\tilde{\ell} = V_1 - V_2 + E_{12} \qquad (2.43)$$

Rezulta ca legea lui Ohm se mai poate scrie:

$$\int_1^2 \rho\,\vec{j}\,d\tilde{\ell} = V_1 - V_2 + E_{12} \qquad (2.44)$$

- Pentru un conductor cilindric, de sectiune S, având o distributie uniforma de sarcina $\vec{j}$ si $d\vec{l}$ au aceeasi directie: $\vec{j}\,d\tilde{\ell} = j\,d\ell$, iar: $j = \frac{I}{S}$, unde I este intensitatea constanta a curentului de conductie. În acest caz, (2.44) devine:

$$I\int_1^2 \rho \frac{d\tilde{\ell}}{S} = V_1 - V_2 + E_{12} \qquad (2.45)$$

Se defineste *rezistenta electrica a portiunii de circuit* cuprinsa între punctele 1 si 2:

$$R_{21} = \int_1^2 \rho \frac{d\tilde{\ell}}{S} \qquad (2.46)$$

Atunci relatia (2.45) se va scrie:

$$I\,R_{21} = V_1 - V_2 + E_{12} \qquad (2.47)$$

Daca circuitul este închis: $V_1 = V_2$, $R_{21} = R_t$, unde R_t este rezistenta totala a circuitului. În acest caz, relatia (2.47) se scrie:

$$I\,R_t = E \qquad (2.48)$$

unde E este suma algebrica a tuturor tensiunilor electromotoare care actioneaza în circuit.

PROBLEME

1.Fie un conductor din cupru cu sectiunea de forma unui patrat cu latura de 1mm, prin care trece un curent de 20A.

a) Stiind ca în cupru exista aproximativ 10^{29} electroni liberi / m^3 si sarcina electronului este e = 1,6 x 10^{-19}C, sa se determine viteza de transport a electronilor prin fir. Sa se compare viteza de transport cu viteza de propagare a unui puls de curent în lungul unui fir, care este de aproximativ 3x10^8m/s.

c) Cât timp i-ar trebui unui electron pentru a strabate un fir cu lungimea de 1m?

Raspuns:

a) Densitatea curentului din fir este J = I/S=2x10^6A/m^2. Atunci avem

$$v = \frac{J}{ne} \approx 10^{-3}\frac{m}{s} = 1\frac{mm}{s}$$

Viteza de transport este foarte mica în comparatie cu viteza de propagare a unui puls electric.

b) $$t = \frac{x}{v} = 1000s \approx 15min$$

2. In spatiul dintre doi cilindri metalici coaxiali, de raze r_a si r_b, se afla un material de rezistivitate ?. Care este rezistenta dintre cei doi cilindri?

Raspuns:

Consideram un strat de forma cilindrica cu raza interna r si grosime dr. Suprafata lui este atunci S=2prl, iar lungimea drumului strabatut de curent prin strat este dr. Astfel, rezistenta dR a stratului este

$$dR = \frac{? \cdot dr}{2prl}$$

si rezistenta totala între cilindri este:

$$R = \frac{r}{2pl}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = \frac{r}{2pl}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

3. In spatiul dintre doua sfere conductoare concentrice, de raze r_a si r_b se afla un material conductor de rezistivitate ?. Aratati ca rezistenta dintre cele doua sfere este

$$R = \frac{?}{4p}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

CAPITOLUL 3. Magnetostatica

3.1 Marimi principale în magnetostatica

Magnetostatica este acea parte a electromagnetismului care studiaza câmpul magnetic, una din formele particulare de manifestare a câmpului electromagnetic. În natura exista unele corpuri, neutre din punct de vedere electric, de exemplu cristalele naturale de magnetita (Fe_3O_4), care exercita atât între ele, cât si asupra corpurilor din Fe, Co, Ni sau aliaje ale acestora, actiuni ponderomotoare (forte si cupluri) specifice.

Aceste actiuni se datoreaza unor forte magnetice, iar regiunea din spatiu în care actioneaza astfel de forte se numeste câmp magnetic. Câmpul magnetic poate fi creat de substantele aflate în stare de magnetizare (magneti), conductoare parcurse de curent de conductie, sarcinile electrice în miscare sau un flux electric variabil. Câmpul electric actioneaza asupra corpurilor si particulelor electrizate aflate în miscare si asupra corpurilor magnetizate (indiferent de starea lor de miscare).

a) Forta electrodinamica

Fie doua conductoare rectilinii, paralele, parcurse de curentii I_1, respectiv I_2. Între ele apare o forta de interactie, numita forta electrodinamica. Valoarea acestei forte, raportata la unitatea de lungime, este:

$$\frac{F}{\ell} = \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \qquad (3.1)$$

unde μ este *permeabilitatea magnetica absoluta a mediului*.

$$\mu = \mu_0 \mu_r \qquad (3.2)$$

cu $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m *permeabilitatea magnetica a vidului*. În cazul în care conductoarele sunt paralele, forta are valoare maxima (relatia 3.1), iar daca sunt perpendiculare, forta este nula.

b) *Forta electromagnetica* este forta cu care un câmp magnetic actioneaza asupra unui curent. Forta electromagnetica si forta electrodinamica au aceeasi natura; deci relatia (3.1) se poate scrie:

$$F = \ell \cdot I_1 B_2 = \ell \cdot I_2 B_1$$

si în general:

$$F = \ell \cdot I \cdot B \qquad (3.3)$$

unde B este *inductia magnetica*, data de *legea experimentala Biot-Savart:*

$$B = \mu \frac{I}{2\pi r} \qquad (3.4)$$

si masoara câmpul magnetic produs de un curent rectiliniu I, într-un punct aflat la distanta r de conductor, într-un plan perpendicular pe acesta.

Având în vedere observatia anterioara, relatia (3.3) trebuie completata:

$$F = \ell \, I \, B \sin \alpha \qquad (3.5)$$

sau vectorial:

$$\vec{F} = I\left(\vec{\ell} \times \vec{B}\right) \qquad (3.6)$$

unde $\vec{\ell}$ are directia si sensul curentului, modulul ℓ este lungimea portiunii de curent care se afla în câmp magnetic, iar α este unghiul dintre $\vec{\ell}$ si $\vec{B}$.

- În cazul în care curentul filiform este curbiliniu, portiunea de curent aflata în câmp magnetic este Γ, iar $\vec{B}$ nu este neaparat acelasi de-a lungul curentului.

$$\vec{F} = I \oint_{\Gamma} d\vec{\ell} \times \vec{B} \qquad (3.7)$$

- În cazul în care curentul nu este filiform, ci este distribuit cu o densitate de curent i într-un volum τ, relatia (3.6) devine:

$$\vec{F} = \int_{\tau} \left(\vec{i} \times \vec{B}\right) d\tau \qquad (3.8)$$

deoarece $Id\vec{\ell} = iSd\vec{\ell} = \vec{i}\, S\, d\ell = \vec{i}\, d\tau$. Relatia (3.8) constituie *formula generala a fortei electromagnetice.*

c) *Forta Lorentz* reprezinta forta care actioneaza asupra unei particule încarcate aflate în câmp electric si magnetic. Forta electromagnetica, adica forta cu care un câmp magnetic actioneaza asupra unui curent, reprezinta forta cu care câmpul magnetic actioneaza asupra sarcinilor aflate în miscare.

Având în vedere ca: $\vec{i} = \rho \vec{v}$, $\rho\, d\tau = dq$, din relatia (3.8) rezulta:

$$\vec{F} = \int_{\tau} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) dq \qquad (3.9)$$

De aici se vede ca forta magnetica cu care câmpul magnetic actioneaza asupra unei particule punctiforme încarcate electric este:

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad (3.10)$$

Daca în afara de câmpul magnetic exista si un câmp electric, atunci forta totala este:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad (3.11)$$

care reprezinta forta Lorentz. Sensul fortei Lorentz depinde de sensul sarcinii electrice asupra careia actioneaza. Componenta magnetica a acestei forte $q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$este perpendiculara pe $\vec{v}$; deci aceasta componenta nu modifica viteza sau energia cinetica a particulei, ci numai directia ei, actionând ca o forta centripeta.

d) *Liniile de inductie magnetica* sunt curbe tangente în fiecare punct la directia locala a vectorului $\vec{B}$ si ecuatia lor este data de:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \qquad (3.12)$$

unde B_x; B_y; B_z sunt componentele vectorului $\vec{B}$. Caracteristica fundamentala a liniilor de câmp magnetic este faptul ca sunt curbe închise (spre deosebire de liniile de câmp electric), ceea ce explica absenta sarcinilor magnetice în natura.

e) *Momentul magnetic*

Daca într-un câmp magnetic de inductie $\vec{B}$ se plaseaza mici corpuri magnetizate, se observa ca asupra lor actioneaza un cuplu de forte $\vec{C}$ care tinde sa roteasca aceste corpuri, astfel încât, pentru o anumita orientare a lor, cuplul sa se anuleze. Dreapta trasata pe corpul aflat în echilibru stabil ($\vec{C}$=0) si orientata în sensul vectorului $\vec{B}$ se numeste *axa de magnetizare*. Modulul valorii maxime a cuplului este proportional cu $\vec{B}$:

$$C_{max} = m\, B \qquad (3.13)$$

unde m depinde numai de starea de magnetizare a corpului si reprezinta marimea momentului magnetic al corpului. Daca $\vec{n}$ este versorul axei de magnetizare, se defineste vectorul moment magnetic:

$$\vec{m} = m\vec{n} \qquad (3.14)$$

Experimental s-a demonstrat ca:

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B} \qquad (3.15)$$

f) *Forta magnetica* care actioneaza asupra unui mic corp magnetizat, de moment magnetic $\vec{m}$, aflat într-un câmp de inductie $\vec{B}$ este:

$$\vec{F}_{mag} = \text{grad}\,(\vec{m}\,\vec{B}) \qquad (3.16)$$

g) *Magnetizatia* este marimea vectoriala locala de stare, definita prin limita raportului dintre momentul magnetic al substantei $\Delta\vec{m}$ dintr-un volum mic $\Delta\tau$, si acest volum:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta\vec{m}}{\Delta\tau} = \frac{d\vec{m}}{d\tau} \qquad (3.17)$$

- Corpurile care prezinta un moment magnetic propriu în absenta unui câmp magnetic exterior au *magnetizatie permanenta*. Aceasta stare este caracterizata de un moment magnetic permanent ($\vec{m}_p$) si o magnetizatie permanenta ($\vec{M}_p$).

- Corpurile care au un moment magnetic doar în prezenta unui câmp magnetic exterior si care dispare daca se înlatura acest câmp sunt corpuri cu *magnetizatie temporara*. Aceasta stare este caracterizata de un moment magnetic temporar ($\vec{m}_t$) si o magnetizatie temporara ($\vec{M}_t$). Atunci, *momentul magnetic total* este:

$$\vec{m} = \vec{m}_p + \vec{m}_t \qquad (3.18)$$

si *magnetizatia totala* este:

$$\vec{M} = \vec{M}_p + \vec{M}_t \qquad (3.19)$$

h) *Intensitatea câmpului magnetic* este marimea vectoriala derivata, definita prin raportul dintre inductia magnetica si permeabilitatea mediului:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \qquad (3.20)$$

i) *Polarizatia magnetica* este marimea vectoriala derivata, definita prin produsul dintre magnetizatie si permeabilitatea vidului:

$$\vec{P} = \mu_0\vec{M} \qquad (3.21)$$

3.2. Formula lui Biot-Savart-Laplace

Laplace a generalizat formula lui Biot-Savart pentru cazul unui curent oarecare constant:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau}\frac{\vec{i}(\vec{r}')\times\vec{R}}{R^3}d\tau' \qquad (3.22)$$

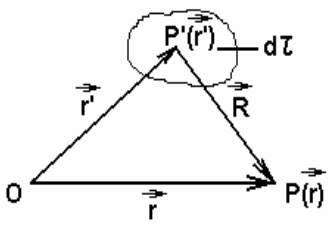


Figura 3. 1

unde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ este vectorul cu originea în punctul P'. Acest punct are vectorul de pozitie $\vec{r}$ ' si se afla în domeniul τ'. În punctul P, de vector de pozitie $\vec{r}$, se calculeaza intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}$ (Figura 3.1). Integrantul din relatia (3.22) se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{\vec{i}(\vec{r}')\times\vec{R}}{R^3} = \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{i}(\vec{r}') = \nabla\times\left[\frac{\vec{i}(\vec{r}')}{R}\right]$$

unde la ultima egalitate s-a folosit identitatea:

$$\nabla\times(s\vec{v}) = \nabla s\times\vec{v} + s\nabla\times\vec{v}$$

s fiind o functie scalara oarecare, iar $\vec{v}$ o functie vectoriala. S-a avut în vedere ca $\vec{i}(\vec{r}')$ nu depinde de coordonatele $\vec{r}$ la care se refera ∇. In aceste conditii, relatia (3.22) se mai poate scrie:

$$\vec{H} = \nabla\times\frac{1}{4\pi}\int_{\tau}\frac{\vec{i}(\vec{r}')}{R}d\tau' \qquad (3.23)$$

Vectorul $\vec{H}$ a fost scris sub forma unui vector: $\vec{H} = \nabla\times\vec{A}$, unde $\vec{A}$ este o functie numita *potential electrodinamic vector*. Legea Biot-Savart-Laplace este variabila doar în cazul stationar si numai cu unele aproximatii, în cazul nestationar.

3.3. Legi de material

3.3.1 Legea fluxului magnetic

Fluxul inductiei magnetice $\vec{B}$ printr-o suprafata închisa Σ (trasata în corpuri sau în vid) este nul:

$$\Phi_m = \oint_{\Sigma}\vec{B}d\vec{S} = \int_{\tau}\nabla\vec{B}d\tau \qquad (3.24)$$

Trecerea de la integrala de suprafata la integrala de volum se face conform formulei Gauss-Ostrogradski. Având în vedere relatiile (3.20) si (3.23) si stiind ca div(rot)=0, rezulta:

$$\Phi_m = \mu\int_{\tau}\nabla\vec{H}d\tau = \mu\int_{\tau}\nabla\left(\nabla\times\vec{A}\right)d\tau = 0 \qquad (3.25)$$

De aici rezulta:

$$\nabla\vec{B} = 0 \qquad (3.26)$$

ceea ce reprezinta *forma diferentiala a legii fluxului magnetic*, care ne arata ca în fiecare punct din câmp, divergenta inductiei magnetice este nula.

3.3.2. Legea circuitului magnetic

Tensiunea electromotoare în lungul unei curbe Γ, trasata în corpuri sau în vid, este egala cu intensitatea curentului electric de conductie I prin suprafata marginita de curba Γ (Ampère).

$$E = \oint_{\Gamma}\vec{H}d\vec{\ell} = I \qquad (3.27)$$

Trecerea de la integrala de linie într-o integrala pe suprafata Σ, marginita de curba Γ se face conform teoremei lui Stokes:

$$\oint_{\Gamma}\vec{H}d\vec{\ell} = \int_{\Sigma}(\nabla\times\vec{H})d\vec{S}$$

Având în vedere relatia (8.4), rezulta:

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j} \qquad (3.28)$$

adica într-un punct din conductorul parcurs de curent electric, rotorul intensitatii câmpului magnetic este egal cu densitatea curentului de conductie.

3.3.3. Legea magnetizatiei temporare

În fiecare punct dintr-un corp, magnetizatia temporara este functie de $\vec{H}$:

$$\vec{M}_t = \vec{M}_t(\vec{H}) \qquad (3.29)$$

În medii liniare, omogene si anizotrope, dependenta este de forma:

$$\vec{M}_t = \tilde{\chi}_m \vec{H} \qquad (3.30)$$

unde $\tilde{\chi}_m$ este *tensorul susceptivitatii magnetice*. Magnetizatia totala va fi:

$$\vec{M} = \vec{M}_P + \vec{M}_t = \vec{M}_P + \tilde{\chi}_m \vec{H} \qquad (3.31)$$

Cunoscând dependenta dintre $\vec{B}$, $\vec{H}$ si $\vec{M}$:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} + \vec{P} \qquad (3.32)$$

rezulta ca, în absenta magnetizatiei permanente ($\vec{M}_p$), inductia magnetica va fi:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \tilde{\chi}_m \vec{H}) = \mu_0(1 + \tilde{\chi}_m)\vec{H} = \tilde{\mu}\vec{H} \qquad (3.33)$$

unde:

$$\tilde{\mu} = \mu_0(1 + \tilde{\chi}_m) \qquad (3.34)$$

este *tensorul permeabilitatii magnetice*.

În medii liniare, omogene si izotrope, tensorii $\tilde{\chi}_m$ si $\tilde{\mu}$ devin scalarii χ_m si μ, iar relatiile (3.30) si (3.33) vor fi:

$$\vec{M}_t = \chi_m \vec{H} \qquad (3.35)$$

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu \vec{H} \qquad (3.36)$$

unde: $\mu = 1 + \chi_m$. În functie de valoarea lui χ_m, substantele pot fi diamagnetice daca $\chi_m < 0$ si paramagnetice daca $\chi_m > 0$.

PROBLEME

1. O vergea dielectrica subtire sub forma unui cerc de raza R este încarcata cu densitatea de sarcina liniara constanta ? si se roteste în jurul axei sale cu viteza unghiulara constanta ? . Sa se calculeze:

a) valoarea inductiei magnetice într-un punct situat pe axa cercului, la distanta r_0 de centru (caz particular $r_0=0$)

b) valoarea momentului magnetic al spirei.

Raspuns:

a) Pentru un curent I prin spira de raza R, la r_0 de planul spirei, pe axa acesteia, rezulta

$$B = \frac{m_0 I R^2}{2r^3} \quad \text{unde} \quad r^2 = r_0^2 + R^2$$

Dar $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{l \cdot dl}{dt} = \frac{l\, 2pR}{T} = l w R$ deci $B = \frac{m_0 l w R^3}{2\left(r_0^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ $B_0 = \frac{m_0 l w}{2}$ pentru $r_0=0$

b) $m = IS = l w p R^3$

2.Sa se determine câmpul electric într-o regiune din spatiu în care câmpul magnetic variaza în timp dupa relatia: a) $B = B_0 e^{at}$; b) $B = B_0 \sin wt$

Raspuns:

a) Se considera un contur L = 2p r pentru care putem scrie

$$\int_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \Phi = BA = Bpr^2 \quad \text{deci} \qquad E = -\frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} = -\frac{r}{2} a B_0 e^{at}$$

b) $E = -\frac{1}{2} r w B_0 \cos wt$

CAPITOLUL 4. Regimul variabil

4.1. Legile regimului variabil

Pâna acum au fost studiate legile fundamentale ale regimului static (electrostatic si magnetostatic) si stationar (electroelectric) pentru câmpul electromag-netic. Daca în aceste situatii, legile date erau dependente numai de pozitie si independente de timp, în cazul regimului variabil, ele depind si de pozitie si de timp. Legile regimului variabil sunt legi de stare si legi de evolutie. Ele se pot exprima sub forma integrala (globala) si diferentiala (locala).

4.1.1 Legi de stare ale câmpului electromagnetic

Aceste legi reprezinta generalizari ale legilor de stare ale regiunilor static si stationar (într-o forma practic identica).

a) *Legea lui Gauss (legea fluxului electric)* în forma integrala are expresia:

$$\int_{\Sigma} \vec{D} d\vec{S} = q \qquad (4.1)$$

iar în forma diferentiala:

$$\nabla \vec{D} = \rho \qquad (4.2)$$

b) *Legea dependentei dintre înductia electrica, intensitatea câmpului electric si polarizatia totala*

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad (4.3)$$

c) *Legea polarizatiei electrice temporare*

$$\vec{P}_t = \vec{P}_t\left(\vec{E}\right) \qquad (4.4)$$

În medii liniare, omogene si anizotrope avem:

$$\vec{P}_t = \varepsilon_0 \tilde{\chi}_e \vec{E}, \qquad \vec{D} = \tilde{\varepsilon}\vec{E}, \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0\left(1 + \tilde{\chi}_e\right)$$

În medii liniare, omogene si izotrope, tensorii $\tilde{\chi}_e$ si $\tilde{\varepsilon}$ sunt marimi scalare.

d) *Legea lui Ohm* (legea conductiei electrice) are expresia în forma integrala:

$$U = R\, I \qquad (4.5)$$

iar în forma locala:

$$\vec{j} = \tilde{\sigma}\left(\vec{E} + \vec{E}_i\right) \qquad (4.6)$$

e) *Legea fluxului magnetic* în corpuri are expresia în forma integrala:

$$\int_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} = 0 \qquad (4.7)$$

iar în forma locala:

$$\nabla \vec{B} = 0 \qquad (4.8)$$

f) *Legea dependentei dintre inductia magnetica, intensitatea câmpului magnetic si magnetizatia totala*:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \qquad (4.9)$$

g) *Legea magnetizatiei temporare*:

$$\vec{M}_t = \vec{M}_t\left(\vec{H}\right) \qquad (4.10)$$

În medii liniare, omogene si anizotrope:

$$\vec{M}_t = \tilde{\chi}_m \vec{H}, \qquad \vec{B} = \tilde{\mu}\vec{H}, \qquad \tilde{\mu} = \mu_0\left(1+\tilde{\chi}_m\right)$$

În medii liniare, omogene si izotrope, tensorii $\tilde{\chi}_m$ si $\tilde{\mu}$ sunt marimi scalare.

4.1.2. Legi de evolutie ale câmpului electromagnetic

Aceste legi reprezinta generalizari ale unor experimente.

a)*Legea conservarii sarcinii electrice* (legea de continuitate)

Fie o suprafata închisa $\sum$ care intersecteaza conductoare parcurse de curent electric si contine în interior corpuri încarcate cu sarcini electrice. Legea se exprima în forma integrala:

$$I = -\frac{dq}{dt} \qquad (4.11)$$

Intensitatea curentului de conductie I care iese din suprafata $\sum$ este egala cu viteza de scadere a sarcinii electrice q din interiorul acestei suprafete.

In forma locala (pentru corpuri mobile) avem expresia:

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S} \text{ si } \vec{j} = \int_{\tau} \rho d\tau,$$

unde $\vec{j}$ este densitatea curentului de conductie si ρ densitatea volumica a sarcinii cuprinse în volumul τ marginit de suprafata $\sum$. Atunci relatia (4.11) se scrie:

$$\int_{\Sigma} \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_{\tau} \rho d\tau.$$

Folosind teorema Gauss-Ostrogradski, rezulta:

$$\int_{\tau} \nabla \vec{j} d\tau = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau,$$

de unde:

$$\nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (4.12)$$

care reprezinta *legea conservarii sarcinii electrice în forma locala*.

b) *Legea inductiei electromagnetice*

Un flux magnetic variabil (inductor) genereaza o tensiune electromotoare indusa. Acest fenomen se numeste *inductie electromagnetica*.

Pentru a deduce aceasta lege în forma integrala, sa consideram un circuit închis format dintr-o bobina si un galvanometru. La introducerea sau scoaterea unui magnet din bobina, are loc o variatie a fluxului magnetic inductor. Spirele bobinei sunt intersectate de un numar variabil de linii de inductie ale magnetului, ceea ce face sa apara un câmp electric indus. Sub actiunea acestui câmp, electronii din circuit vor avea o miscare ordonata, dând nastere unui curent electric de inductie. La rândul sau, acest curent genereaza un câmp magnetic de inductie si se datoreaza fortei electromotoare de inductie care apare datorita variatiei fluxului inductor.

Fie o portiune dintr-o spira a bobinei, de lungime ab = ℓ. Aceasta se deplaseaza pe distanta aa' = dx într-un timp dt cu viteza $\vec{v}$ într-un câmp magnetic omogen, de inductie $\vec{B}$ (Figura 4.1). Asupra electronilor liberi din acest conductor, actioneaza forta Lorentz ($\vec{F}$). Sub actiunea acestei forte, electronii se vor deplasa catre capatul b, încarcându-l negativ, în timp ce capatul a se încarca pozitiv.

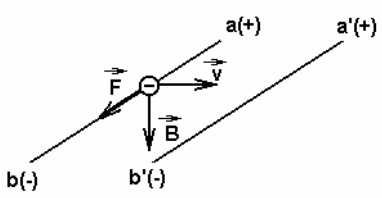


Figura 4.1

Câmpul electric imprimat, corespunzator fortei Lorentz, are intensitatea:

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B} \qquad (4.13)$$

Tensiunea electromotoare indusa în portiunea $d\vec{l}$ a conductorului va fi:

$$dE = \vec{E}_i d\vec{\ell} = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{\ell} \qquad (4.14)$$

Atunci, în întreg conductorul, de lungime orientala ℓ, tensiunea indusa este:

$$E = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{\ell} \qquad (4.15)$$

Prin înmultirea relatiei (4.15) cu dt, se obtine:

$$E\,dt = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\vec{\ell}\,dt = \left(\vec{v}\,dt \times \vec{B}\right)\vec{\ell} =$$
$$= \left(d\vec{x} \times \vec{B}\right)\vec{\ell} = -\vec{B}\left(d\vec{x} \times \vec{\ell}\right) = -\vec{B}\,d\vec{S} \qquad (4.16)$$

unde $d\vec{S}$ este aria suprafetei orientate aa'b'b, care a fost strabatuta de portiunea ab a spirei în timpul dt. Cum acest element de arie a fost strabatut de fluxul: $d\Phi_m = \vec{B}d\vec{S}$, din relatia (4.16) se obtine:

$$E = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad (4.17)$$

care reprezinta *legea inductiei electromagnetice în forma integrala*. Deci, daca printr-o sectiune S a unei spire fluxul magnetic variaza, atunci în spira se induce o tensiune electromotoare E .

Variatia fluxului magnetic, deci inducerea unei tensiuni electromotoare se poate produce prin:

-variatia inductiei magnetice $\vec{B}$ (modificarea modulului sau sensului);

-variatia sectiunii $\vec{S}$ (modificarea modulului sau a pozitiei în raport cu câmpul)

-variatia ambilor factori ai fluxului magnetic $\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S}$

Faraday a evidentiat doua laturi distincte ale fenomenului inductiei electromagnetice:

- variatia câmpului reduce tensiune;
- miscarea în câmp induce tensiune.

Sensul este dat de *legea lui Lenz*: sensul tensiunii induse este astfel încât fluxul magnetic al curentului indus sa compenseze variatia câmpului inductor. Astfel,

- daca fluxul inductor creste, se induce o tensiune al carui curent produce un flux magnetic în sens contrar fluxului inductor;
- daca fluxul inductor scade, se reduce o tensiune al carui curent produce un flux magnetic de acelasi sens cu fluxul inductor.

Forma locala a legii inductiei electromagnetice se deduce inlocuind relatiile (3.42) si (4.24)

$$E = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{\ell} \qquad \Phi_m = \int_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S}$$

în legea inductiei electromagnetice (4.17). Se obtine:

$$\oint_{\Gamma}\vec{E}d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int_{\Sigma}\vec{B}d\vec{S} \qquad (4.18)$$

Sau, folosind teorema lui Stokes, avem:

$$\int_{\Sigma}\left(\nabla\times\vec{E}\right)d\vec{S}=-\int_{\Sigma}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}$$

de unde:

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (4.19)$$

care reprezinta *legea inductiei electromagnetice în forma locala*.

c) *Legea circuitului magnetic* a lui Ampère (9.27) nu mai este valabila în regim variabil, pentru ca nu mai este compatibila cu legea de continuitate a sarcinii electrice.

Pentru a deduce legea in *forma integrala*, tinem cont ca in prezenta fluxului inductiei variabil în timp, curentului de inductie I i se adauga si curentul de deplasare I_d (vezi relatia 8.34). În acest mod legea lui Ampère ramîne valabila, cu conditia ca în membrul drept sa figureze curentul total $I_t = I + I_d$:

$$E_m=\oint_{\Gamma}\vec{H}\,d\vec{l}=I+I_d \qquad (4.20)$$

care reprezinta *legea circuitului magnetic în forma integrala*: tensiunea magnetomotoare E_m în lungul unei curbe închise Γ este egala cu suma dintre curentul electric de conductie si curentul electric de deplasare prin suprafata marginita de curba Γ.

Pentru a deduce expresia legii în forma locala înlocuim (2.4) si (2.34) $I=\int_{\Sigma}\vec{j}d\vec{S}$ si $I_d=\int_{\Sigma}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}d\vec{S}$ în (4.20) si se obtine:

$$\oint_{\Gamma}\vec{H}\,d\vec{\ell}=\int_{\Sigma}\vec{j}\,d\vec{S}+\int_{\Sigma}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}d\vec{S} \qquad (4.21)$$

sau, folosind teorema lui Stokes:

$$\int_{\Sigma}\left(\nabla\times\vec{H}\right)d\vec{S}=\int_{\Sigma}\left(\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)d\vec{S},$$

de unde:

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (4.22)$$

care reprezinta *legea circuitului magnetic în forma locala.*

d) Ecuatiile lui Maxwell

Aceste ecuatii descriu legile inductiei electro-magnetice si circuitului magnetic pentru medii imobile, precum si legile fluxului electric si magnetic.

In forma integrala avem:

$$\oint_{\Gamma}\vec{E}d\vec{\ell}=-\int_{\Sigma}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S} \qquad (4.23)$$

$$\oint_{\Gamma}\vec{H}\,d\vec{\ell}=\int_{\Sigma}\vec{j}d\vec{S}+\int_{\Sigma}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}d\vec{S} \qquad (4.24)$$

$$\int_{\Sigma}\vec{D}\,d\vec{S}=q \qquad (4.25)$$

$$\int_{\Sigma} \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \qquad (4.26)$$

In forma locala avem:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4.27)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (4.28)$$

$$\nabla \vec{D} = \rho \qquad (4.29)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \qquad (4.30)$$

Problema fundamentala a electromagnetismului consta în integrarea sistemului de ecuatii Maxwell pentru diverse situatii concrete.

4.2. Ecuatiile de trecere pentru câmpul electromagnetic la suprafata de separatie dintre doua medii diferite

La suprafata de separatie dintre doua medii diferite au loc discontinuitati ale constantelor ε, μ si σ. Din acest motiv apar modificari ale vectorilor $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}$ si $\vec{B}$. Conditiile limita ce apar pe suprafata de separatie impun anumite ecuatii de trecere pentru cele doua componente (electrica si magnetica) a câmpului electromagnetic.

Fie $\sum$ suprafata de separatie dintre doua medii 1 si 2, $\vec{n}$ versorul unui element de arie ΔS al suprafetei $\sum$, orientat dinspre mediul 2 catre mediul 1 si $\vec{t}$ versorul tangent la suprafata de separatie (fig. 4.2)

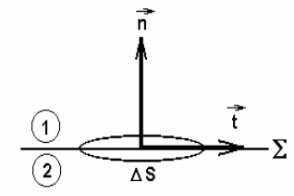


Figura 4.2

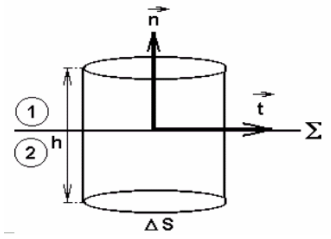


Figura4.3

4.2.1. Ecuatia de trecere pentru vectorul $\vec{D}$

Se considera o suprafata cilindrica S de înaltime $h \to 0$ si de arie a bazei ΔS (fig. 4.3). Daca σ este densitatea superficiala de sarcina pe suprafata $\sum$, atunci în interiorul suprafetei cilindrice se gaseste sarcina $q = \sigma \Delta S$. Fluxul inductiei electrice Φ_e (vezi relatia 1.16) prin suprafata S se compune din fluxul pe suprafata superioara Φ_1, pe cea inferioara Φ_2 si prin cea laterala Φ_3. Când $h \to 0$, suprafata laterala devine nula, deci $\Phi_{e\,3} = 0$. Rezulta:

$\Phi_{e1} = D_{n1}\Delta S$, $\Phi_{e2} = - D_{n2}\Delta S$,

unde:

$D_{n_1} = \vec{D}_1\vec{n}$ si $D_{n_2} = -\vec{D}_2\vec{n}$

sunt componentele normale ale inductiei electrice $\vec{D}_1$ si $\vec{D}_2$ în cele doua medii si:

$$\Phi_e = (D_{n1} - D_{n2})\,\Delta S \qquad (4.31)$$

Înlocuind în legea fluxului electric relatia 4.25: $\Phi_e = \int_\Sigma \vec{D} d\vec{S} = q$, rezulta:

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma \qquad (4.32)$$

ceea ce reprezinta ecuatia de trecere pentru componentele normale ale inductiei electrice.

4.2.2. Ecuatia de trecere pentru vectorul $\vec{B}$

Fluxul inductiei magnetice Φ_m (3.24) prin suprafata S (fig.4.3) are aceleasi componente ca în cazul fluxului inductiei electrice:

$\Phi_{m3} = 0$, $\Phi_{m1} = B_{n1} \Delta S$, $\Phi_{m2} = - B_{n2} \Delta S$,

unde:

$$B_{n_1} = \vec{B}_1 \vec{n} \text{ si } B_{n_2} = -\vec{B}_2 \vec{n}$$

sunt componentele normale ale inductiei magnetice $\vec{B}_1$ si $\vec{B}_2$ în cele doua medii. Atunci:

$$\Phi_m = \left(B_{n_1} - B_{n_2}\right) \Delta S \qquad (4.33)$$

Înlocuind în legea fluxului magnetic relatia 4.26:

$$\Phi_m = \int_\Sigma \vec{B} d\vec{S} = 0$$

rezulta:

$$B_{n_1} = B_{n_2} \qquad (4.34)$$

ceea ce reprezinta *ecuatia de trecere pentru componentele normale ale inductiei magnetice*.

4.2.3.Ecuatia de trecere pentru vectorul $\vec{H}$

Fie un contur dreptunghiular Γ de înaltime $h \to 0$ si lungime $\Delta\ell$ (fig. 4.4). Se considera ca pe suprafata de separatie Σ exista o distributie superficiala de curenti $\vec{j}_\Sigma$.

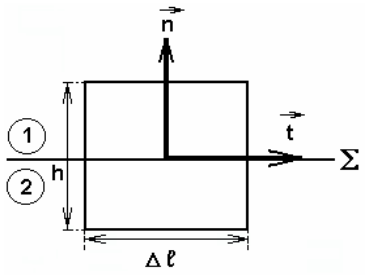


Figura 4. 4

Din legea circuitului magnetic (relatia 4.24) se obtine:

$$\int_\Sigma \vec{j} d\vec{S} = \vec{j}_\Sigma \Delta\ell \vec{n} \qquad (4.35)$$

$$\lim_{h\to 0} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \lim_{h\to 0} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot h \cdot \Delta\ell \cdot \vec{p} \qquad (4.36)$$

unde $\vec{p} = \vec{t} \times \vec{n}$ este versorul normalei la suprafata $S = h\Delta\ell$ a dreptunghiului.

$$\lim_{h\to 0} \oint_\Gamma \vec{H}\, d\vec{\ell} = \lim_{h\to 0} \left(H_{t_1} \Delta\ell - H_{t_2} \Delta\ell + C\right) =$$

$$= \left(H_{t_1} - H_{t_2}\right)\Delta\ell \qquad (4.37)$$

unde $H_{t_1} = \vec{H}_1\vec{t}$ si $H_{t_2} = -\vec{H}_2\vec{t}$ sunt componentele tangentiale ale vectorului $\vec{H}$ în cele doua medii, iar C $\rightarrow$ 0 este circulatia de-a lungul laturilor laterale care tind catre zero. Rezulta:

$$H_{t_1} - H_{t_2} = j_\Sigma \qquad (4.38)$$

ceea ce reprezinta *ecuatia de trecere pentru componentele tangentiale ale intensitatii câmpului magnetic.*

4.2.4.Ecuatia de trecere pentru vectorul $\vec{E}$

Din legea inductiei electromagnetice (relatia 4.23) se obtine:

$$\lim_{h\to 0}\oint_\Gamma \vec{E}\, d\vec{\ell} = \lim_{h\to 0}\left(E_{t_1}\Delta\ell - E_{t_2}\Delta\ell + C'\right) =$$

$$= \left(E_{t_1} - E_{t_2}\right)\Delta\ell \qquad (4.39)$$

unde $E_{t_1} = \vec{E}_1\vec{t}$ si $E_{t_1} = \vec{E}_1\vec{t}$ sunt componentele tangentiale ale vectorului $\vec{E}$ în cele doua medii, iar C'$\rightarrow$0 este circulatia de-a lungul laturilor laterale care tind catre zero.

$$\lim_{h\to 0}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S} = \lim_{h\to 0}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, h\cdot\Delta l\cdot\vec{p} \qquad (4.40)$$

unde $\vec{p}$ si S au aceleasi semnificatii ca în cazul anterior, rezulta:

$$E_{t_1} = E_{t_2} \qquad (4.41)$$

ceea ce reprezinta *ecuatia de trecere pentru componentele tangentiale ale intensitatii cuplului electric.*

In concluzie:

- componenta normala a inductiei magnetice si cea tangentiala a intensitatii câmpului electric nu sufera discontinuitati la trecerea dintr-un mediu în altul;
- componenta normala a inductiei magnetice si cea tangentiala a intensitatii câmpului electric sufera discontinuitati la trecerea dintr-un mediu în altul;
- daca pe suprafata de separatie dintre cele doua medii nu exista densitate superficiala de sarcini (σ = 0), atunci componenta normala a inductiei electrice este continua la trecerea dintr-un mediu în altul;
- daca pe suprafata de separatie dintre cele doua medii nu exista distributie superficiala de curenti (j_Σ = 0), atunci componenta tangentiala a intensitatii câmpului magnetic este continua la trecerea dintr-un mediu în altul.

4.3. Conservarea energiei câmpului magnetic

Se considera ca într-un volum τ fluxul de energie electromagnetica se propaga cu viteza finita. De asemenea, se presupune ca proprietatile electrice ale câmpului, exprimate prin ε si σ si cele magnetice, exprimate prin μ, nu depind de $\vec{E}$ si $\vec{B}$. Pentru un mediu liniar, omogen si izotrop, se rescriu ecuatiile lui Maxwell numai în functie de vectorii $\vec{E}$ si $\vec{B}$.

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (4.42)$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu\vec{j} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (4.43)$$

$$\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (4.44)$$

$$\nabla\vec{B} = 0 \qquad (4.45)$$

Se înmulteste scalar ecuatia (4.42) cu $\vec{B}$ si ecuatia (4.43) cu $\vec{E}$, apoi se scad:

$$\vec{B}\left(\Delta\times\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\nabla\times\vec{B}\right)=-\vec{B}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\mu\varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\vec{j}\vec{E}\,.$$

Deoarece:

$$\nabla\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\nabla\times\vec{B}\right),$$

$$\vec{B}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{B}^2}{\partial t}$$

$$\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t},$$

rezulta:

$$\nabla\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}^2+\mu\varepsilon\vec{E}^2\right)-\mu\vec{j}\vec{E}\,.$$

Se împarte aceasta relatie prin μ si se obtine:

$$\nabla\frac{1}{\mu}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}^2+\varepsilon\vec{E}^2\right)\right]-\vec{j}\vec{E} \qquad (4.46)$$

Se integreaza relatia (4.46) pe domeniul de volum τ si se obtine:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}^2+\varepsilon\vec{E}^2\right)\right]d\tau=\int_\tau\vec{j}\vec{E}d\tau+\int_\tau\nabla\frac{1}{\mu}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)d\tau \qquad (4.47)$$

Se fac notatiile:

$$w_{em}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}^2+\varepsilon\vec{E}^2\right) \qquad (4.48)$$

$$W_{em}=\int_\tau w_{em}\,d\tau \qquad (4.49)$$

$$Y=\frac{1}{\mu}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) \qquad (4.50)$$

unde w_{em} si W_{em} sunt *densitatea de energie electromagnetica*, respectiv *energia electromagnetica*, iar Y este *vectorul Poynting*. Atunci (4.47) devine:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau w_{em}\,d\tau=\int_\tau\vec{j}\vec{E}d\tau+\int_\tau\nabla\vec{Y}d\tau \qquad (4.51)$$

Prima integrala din membrul drept se scrie:

$$\int_\tau\vec{j}\,\vec{E}\,d\tau=\int_\Sigma\vec{j}\,d\vec{S}\int_\Gamma\vec{E}\,d\vec{\ell}=\ E\ I=\frac{\partial W_y}{\partial t} \qquad (4.52)$$

unde I este intensitatea curentului de conductie (relatia 2.4), E este tensiunea electromotoare (2.42), iar dW=IEdt este caldura degajata în dt prin efect Joule. A doua integrala din membrul drept se rescrie cu teorema Gauss -Ostrogradski:

$$\int_\tau\nabla\vec{Y}d\tau=\int_\Sigma\vec{Y}d\vec{S}=\Phi_Y \qquad (4.53)$$

unde Φ este *fluxul total al vectorului Poynting*. Atunci relatia (4.51) devine:

$$-\frac{\partial W_{em}}{\partial t}=\frac{\partial W_y}{\partial t}+\Phi_Y \qquad (4.54)$$

care reprezinta *legea conservarii energiei electromagnetice*. Enuntul acestei legi este: scaderea energiei electromagnetice este egala cu suma dintre caldura

dezvoltata prin efect Joule si fluxul de energie electromagnetica care strabate suprafata Σ ce înconjoara elementul de volum considerat.

4.4. Unde electromagnetice

Transportul energiei electromagnetice în câmp electromagnetic este descris de vectorul Poynting, care are directia si sensul de propagare a undei electromagnetice.

Se considera un mediu omogen si dielectric (σ = 0) si se retranscriu ecuatiile lui Maxwell în functie de vectorii $\vec{D}$ si $\vec{H}$.

$$\nabla \times \vec{D} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (4.55)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (4.56)$$

$$\nabla \vec{D} = 0 \qquad (4.57)$$

$$\nabla \vec{H} = 0 \qquad (4.58)$$

Se aplica rotorul ecuatiilor (4.55) si (4.56). Se stie ca:

$\nabla \times \nabla \times \vec{a} = \nabla (\nabla \vec{a}) - \Delta \vec{a}$

Avem:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{D} = -\mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{D}\right)$$

rezulta:

$$\nabla\left(\nabla \vec{D}\right) - \Delta \vec{D} = -\mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla\left(\nabla \vec{H}\right) - \Delta \vec{H} = \nabla \times \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)$$

Înlocuind ecuatiile (4.57) si (4.58) se obtine:

$$\nabla\rho - \Delta \vec{D} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$$

$$0 - \Delta \vec{H} = \nabla \times \vec{j} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Adica:

$$\nabla \vec{D} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = \nabla\rho + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \qquad (4.59)$$

$$\nabla \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{j} \qquad (4.60)$$

Se defineste operatorul d'Alembertian:

$$ÿ = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{¶^2}{¶ t^2} \qquad (4.61)$$

Atunci ecuatiile (4.59) si (4.60) se vor scrie:

$$ÿ \vec{D} = \nabla\rho + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \qquad (4.62)$$

$$\ddot{y}\vec{H} = -\nabla \times \vec{j} \qquad (4.63)$$

Aceste ecuatii sunt de tip d'Alembert neomogene:

$$\ddot{y}\vec{F} = -\vec{f} \qquad (4.64)$$

Ecuatia de tip (4.64) este *ecuatia de propagare cu viteza v a câmpului* $\vec{F}$ *produs de sursa* (factorul perturbator) $\vec{f}$. Prin urmare, ecuatiile (4.62) si (4.63) exprima propagarea cu viteza $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ a câmpului $\vec{D}$, respectiv $\vec{H}$, având sursele (termenii perturbatori): $-\nabla\rho - \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ si $\nabla \times \vec{j}$.

În particular, pentru medii fara distributii de sarcini ($\rho = 0$) si curenti ($\vec{j} = 0$), rezulta:

$$\ddot{y}\vec{D} = 0 \qquad (4.65)$$

$$\ddot{y}\vec{H} = 0 \qquad (4.66)$$

Aceste doua ecuatii reprezinta de fapt ecuatia generala a undelor vectoriale, care se propaga cu viteza v. Deci, din ecuatiile lui Maxwell rezulta ca un câmp electromagnetic se propaga în spatiu sub forma de unde electromagnetice cu viteza finita v, care depinde de constantele electrice si magnetice ale mediului.

În cazul vidului, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}856\cdot10^{-12}$ F/m si $\mu = \mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ N/A^2 , iar viteza este:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c \cong 3\cdot10^8 \text{ m/s} \qquad (4.67)$$

Deci în vid, câmpul electromagnetic se propaga cu o viteza egala cu viteza luminii în vid.

Într-un câmp mediu oarecare, deoarece $\varepsilon > \varepsilon_0$ si $\mu > \mu_0$, rezulta ca $v < c$, în concordanta cu principiile teoriei relativitatii. Raportul:

$$n = \frac{c}{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)^{-1} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \qquad (4.68)$$

se numeste indice de refractie absolut al mediului, iar $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ si $\mu_r = \mu/\mu_0$ sunt permitivitatea electrica relativa,respectiv permeabilitatea magnetica relativa a mediului considerat (fata de vid).

Ecuatiile (4.65) si (4.66) pot fi usor integrate în doua situatii:

a) pentru unde sferice generate de surse punctiforme în medii izotrope, pentru care solutia generala a ecuatiei undelor progresive este de tipul:

$$\vec{F}(r, t) = \frac{1}{r}\vec{f}\left(t - \frac{r}{v}\right) \qquad (4.69)$$

unde: $v = (\varepsilon\,\mu)^{-1/2}$ este viteza de faza, r distanta de la sursa la punctul de observatie.

În cazul undelor electromagnetice sferice se obtine:

$$\vec{D}(r,t) = \frac{1}{r}\vec{f}_1\left(t - \frac{r}{v}\right) \qquad (4.70)$$

$$\vec{H}(r,t) = \frac{1}{r}\vec{f}_2\left(t - \frac{r}{v}\right) \qquad (4.71)$$

b) pentru unde plane, solutia generala a ecuatiei undelor progresive este de tipul:

$$\vec{F}(r, t) = \vec{f}\left(t - \frac{r}{v}\right) \qquad (4.72)$$

Dintre functiile particulare $\vec{f}\left(t - \frac{r}{v}\right)$, se alege functia periodica sinusoidala:

$$\vec{F}(r,t) = \vec{A}\cos\left(\omega t - \vec{K}\,\vec{r} + \varphi\right) \qquad (4.73)$$

definind unda armonica plana. Utilizând forma exponentiala, se poate scrie:

$$\vec{F}(r,t) = \vec{A}\, e^{i\left(\omega t - \vec{K}\,\vec{r} + \varphi\right)} = \vec{a}\, e^{i\left(\omega t - \vec{K}\,\vec{r}\right)} \qquad (4.74)$$

unde: $\vec{a} = \vec{A}_0\, e^{i\varphi}$ este amplitudinea complexa a undei. Notând:

$$\vec{F}_0(\vec{r}) = \vec{a}\, e^{-i\vec{K}\,\vec{r}} \qquad (4.75)$$

se obtine:

$$\vec{F}(r,t) = \vec{F}_0(\vec{r})\, e^{-i\vec{K}\,\vec{r}} \qquad (4.76)$$

În cazul undelor electromagnetice plane se obtine:

$$\vec{D}(r,t) = \vec{D}_0(\vec{r})\, e^{i\omega t} \qquad (4.77)$$

$$\vec{H}(r,t) = \vec{H}_0(\vec{r})\, e^{i\omega t} \qquad (4.78)$$

4.5. Transversalitatea undelor electromagnetice

Pentru o unda electromagnetica oarecare, vectorii $\vec{E}$ si $\vec{H}$ sunt perpendiculari atât între ei, cât si pe directia comuna de propagare, descrisa de versorul $\vec{u} = \frac{\vec{k}}{k}$. Din relatia (4.55) avem $\nabla \times \vec{D} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ si din analiza câmpurilor vectoriale, pentru care se stie ca exista relatia:

$$\nabla \times \vec{D} = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u} \times \vec{D}\right) \qquad (4.79)$$

Rezulta:

$$-\mu\varepsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u} \times \vec{D}\right) \qquad (4.80)$$

de unde se obtine: $\vec{u} \times \vec{D} = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\vec{H}$. De aici rezulta:

$$\vec{H} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(\vec{u} \times \vec{D}\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\vec{u} \times \vec{E}\right) \qquad (4.81)$$

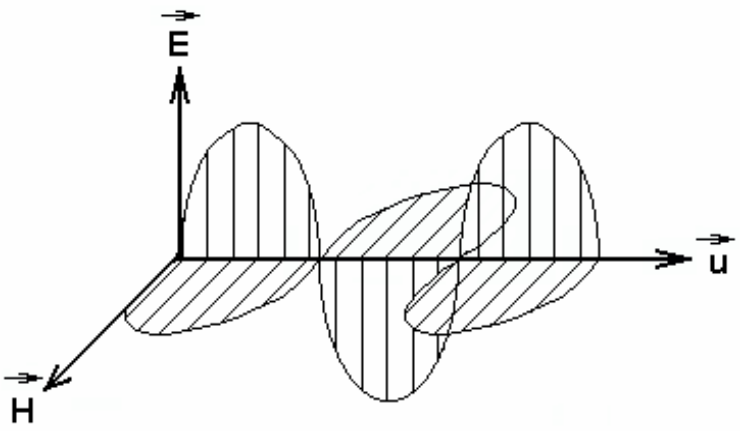


Figura 4.5

ceea ce arata ca $\vec{H}$ este perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{u}$ si $\vec{E}$. In mod analog, considerând $\vec{j} = 0$, din relatia (4.56) rezulta:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (4.82)$$

Tînând seama de relatia (4.79), avem si în acest caz:

$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u} \times \vec{H}\right) = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H} \times \vec{u}\right) \qquad (4.83)$$

Prin identificare se obtine: $\vec{D} = \sqrt{\mu\varepsilon}\left(\vec{H} \times \vec{u}\right)$, de unde:

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\vec{H} \times \vec{u}\right) \qquad (4.84)$$

ceea ce arata ca $\vec{E}$ este perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{u}$ si $\vec{H}$.

În consecinta, vectorii $\vec{E}$, $\vec{u}$ si $\vec{H}$ formeaza un triedru drept, adica undele electromagnetice sunt unde vectoriale transversale (fig. 4.5).

Luându-se în consideratie modulele vectorilor $\vec{E}$ si $\vec{H}$ date de relatiile (4.81) si (4.84), rezulta:

$$E = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, H \qquad \text{sau:} \qquad E = Z\,H \qquad (4.85)$$

unde:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (4.86)$$

se numeste *impedanta intrinseca a mediului* (pentru vid $Z = 120\pi\ \Omega$).

De asemenea, tinând seama de (4.84), vectorul Poynting devine:

$$\vec{Y} = \frac{1}{\mu}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \vec{E}\times\vec{H} = \vec{E}\times\sqrt{\frac{e}{\mu}}\left(\vec{u}\times\vec{E}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{e}{\mu}}\vec{E}^2\vec{u} = \sqrt{\frac{e}{\mu}}\vec{E}^2\cdot v\sqrt{e\mu}\vec{u} = eE^2\vec{v} = \mu H^2\vec{v} \qquad (4.87)$$

în care $\vec{v} = v\vec{u}$ este vectorul vitezei de propagare. Se vede ca vectorul Poynting are aceeasi directie si sens cu $\vec{v}$.

In concluzie, pentru un mediu liniar, omogen izotrop si conservativ:

a) undele electromagnetice sunt unde vectoriale transversale, produse prin interactiunea dintre un câmp electric si un câmp magnetic, ambele variabile în timp, care se conditioneaza reciproc.

b) câmpul electromagnetic se propaga în spatiul liber sub forma de unde electromagnetice, având o viteza de faza constanta $v = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ independenta de caracteristicele undei si egala cu faza de grup.

c) vectorii $\vec{E}$ si $\vec{H}$ oscileaza în faza perpendicular atât între ei, cât si pe directia de propagare definita prin versorul $\vec{u}$, astfel încât $\vec{E}$, $\vec{H}$ si $\vec{u}$ alcatuiesc un triedru drept.

4.6 Potentiale electrodinamice

Sistemul de ecuatii Maxwell poate fi rezolvat mult mai simplu daca se exprima vectorii $\vec{B}$ si $\vec{E}$ prin intermediul a doua functii: $\vec{A}$ - potential vector si φ -potential scalar, denumite *potentiale electrodinamice*.

a) Se stie ca divergenta unui rotor este nula. Atunci exista un vector $\vec{A}$ astfel încât relatia (4.30) sa poata fi scrisa în modul urmator:

$$\nabla\vec{B} = \nabla\,(\nabla\times\vec{A}) = 0$$

de unde:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \qquad (4.88)$$

Relatia (4.88) defineste *potentialul vector* $\vec{A}$.

b) Înlocuind relatia (4.88) în (4.27) rezulta:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{A}\right)$$

de unde:

$$\nabla\times\left(E + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Cum rot (grad)=0, rezulta ca exista un scalar φ astfel încât:

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi \qquad (4.89)$$

relatie care defineste potentialul scalar φ. De aici rezulta:

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi \qquad (4.90)$$

Înlocuind relatiile (4.88) si (4.90) în relatiile (4.28) si (4.29) si tinând cont ca $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ si $\vec{B}=\mu\vec{H}$, se obtine:

$$\nabla\times\frac{\vec{B}}{\mu}=\vec{j}+\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t} \quad \text{si} \quad \nabla\left(\varepsilon\vec{E}\right)=\rho,$$

de unde:

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu\,\vec{j}+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)$$

$$\nabla\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Întrucât $\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\left(\nabla\vec{A}\right)-\Delta\vec{A}$, ultimele relatii se pot scrie:

$$\nabla\left(\nabla\vec{A}\right)-\Delta\vec{A}=\mu\vec{j}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\vec{A}\right)-\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Rearanjând termenii în prima ecuatie si scazând ($\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$) din fiecare membru al celei de-a doua ecuatie, rezulta:

$$\Delta\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\nabla\left(\nabla\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\varphi\vec{j} \qquad (4.91)$$

$$\Delta\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (4.92)$$

În acest mod, ecuatiile lui Maxwell s-au redus la doua ecuatii, una vectoriala si una scalara, pentru potentialele $\vec{A}$ si φ. Definirea acestor potentiale cu relatiile (4.88) si (4.89) nu este univoca. Astfel, fie doua valori particulare $\vec{A}_0$ si φ_0 ale solutiilor acestor ecuatii. Atunci exista o functie arbitrara Ψ, astfel încât:

$$\vec{A}_0=\vec{A}-\nabla\Psi \qquad (4.93)$$

$$\varphi_0=\varphi+\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad (4.94)$$

Atunci se poate exprima câmpul cu ajutorul acelor noi potentiale:

$$\vec{B}_0=\nabla\times\vec{A}_0=\nabla\times\left(\vec{A}-\nabla\Psi\right)=$$
$$=\nabla\times\vec{A}-\nabla\times\nabla\Psi=\nabla\times\vec{A}=\vec{B} \qquad (4.95)$$

$$\vec{E}_0=-\frac{\partial\vec{A}_0}{\partial t}-\nabla\varphi_0=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}-\nabla\Psi\right)-\nabla\left(\varphi+\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)=$$
$$=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\Psi\right)-\nabla\varphi-\nabla\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi=\vec{E} \qquad (4.96)$$

Transformarile (4.93) si (4.94) ale potentialelor electrodinamice se numesc *transformari de etalon*. Invarianta vectorilor $\vec{E}$ si $\vec{B}$ la transformarile de etalon ale potentialelor electrodinamice impun o conditie suplimentara pentru acestea:

$$\nabla\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad (4.97)$$

numita *conditie de etalonare Lorentz*. Înlocuind relatiile (4.93) si (4.94) în conditia de etalonare Lorentz, se obtin:

$$\nabla\vec{A}_0 + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} = \nabla\left(\vec{A} - \nabla\Psi\right) + \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi + \frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) =$$

$$\nabla\vec{A} - \Delta\Psi + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \nabla\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \left(\Delta\Psi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)$$

Cum însa functia Ψ este arbitrara, o putem lua astfel încât:

$$\Delta\Psi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.98)$$

ceea ce este echivalent cu conditia de etalonare Lorentz.

Relatia (4.98) mai poate fi scrisa folosind operatorul d'Alembertian aplicat unei functii scalare Ψ:

$$\ddot{y}\Psi = 0 \qquad (4.99)$$

ceea ce este echivalent cu ecuatia omogena a undelor pentru functia Ψ. Aplicând conditia de etalonare Lorentz în relatiile (4.91) si (4.92), se obtine:

$$\ddot{y}\,\vec{A} = -\mu\vec{j} \qquad (4.100)$$

$$\ddot{y}\,\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (4.101)$$

care reprezinta ecuatii neomogene a undelor pentru potentialul vectorial $\vec{A}$, respectiv pentru potentialul scalar φ.

În domeniul câmpului care ocupa întreg spatiul (τ_∞), solutiile acestor ecuatii pot fi puse sub forma:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \mu\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_\infty}\frac{\vec{j}\left(\vec{r},t-\frac{r}{v}\right)}{r}d\tau \qquad (4.102)$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_\infty}\frac{\rho\left(\vec{r},t-\frac{r}{v}\right)}{r}d\tau \qquad (4.103)$$

unde r este distanta de la elementul $d\tau$ pâna la punctul de observatie, iar $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ este un termen având dimensiunile unei viteze.

Potentialele $\vec{A}$ si φ pot fi astfel considerate ca fiind *potentiale întârziate* si pun în evidenta faptul ca în spatiul liber, câmpul electromagnetic se propaga din aproape în aproape cu viteza $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

PROBLEME

1. O unda electromagnetica plana cu lungimea de unda ?=3m se propaga în aer în directia Ox având amplitudinea câmpului electric (dupa axa Oy) de 300 V/m. Sa se determine: a) frecventa undei; b) amplitudinea si directia vectorului $\vec{H}$; c) puterea medie în timp pe unitatea de suprafata.

Raspuns:

a) $n = \frac{c}{l} = 10^8 Hz$

b) $H = \frac{E}{z} = 0{,}8A/m$, $z = \sqrt{\frac{m}{e}}$ fiind impedanta undei plane, care în cazul aerului este z=377O

c) $P = \int \vec{Y} d\vec{S}$ => $Y = \frac{P}{S}$ $\quad Y_x^{\max} = \frac{EH}{2} = 120 \frac{W}{m^2}$

unde S este componenta constanta în timp a vectorului Poyting. Unda se propaga dupa axa Ox, câmpul electric oscileaza dupa axa Oy, iar câmpul magnetic dupa axa Oz.

2. Lumina Soarelui ajunge cu intensitatea de 1,4 x 10^3 W/m^2 la limita exterioara a atmosferei Pamântului. Sa se determine valorile maxime ale vectorilor $\vec{E}$ si $\vec{H}$ pentru lumina solara, presupunând ca este o unda electromagnetica plana.

Raspuns:

Valoarea 1,4 x 10^3 W/m^2 reprezinta valoarea vectorului Poyting deoarece $P = \int \vec{Y} d\vec{S}$. Rezulta ca $Y_x^{\max} = \frac{EH}{2} = 120 \frac{W}{m^2}$, cu valori maxime pentru cei trei vectori. Tinând cont ca $E = zH$, avem

$$E = \sqrt{2zY} = 1027 \frac{V}{m}$$

$$H = \sqrt{\frac{2Y}{z}} = 2{,}7 \frac{A}{m}$$

CAPITOLUL 5. TEORIA ELECTROMAGNETICA A LUMINII

Natura electromagnetica a luminii a fost intuita de catre Maxwell, fiind confirmata ulterior de multe date experimentale, care arata ca undele luminoase sunt unde electromagnetice. Diversele domenii spectrale (vezi fig. 5.1.) apar pentru urmatoarele domenii ale lungimilor de unda:

- radiatiile ultraviolete $\lambda \in$ (100-4000) $\overset{0}{A}$
- lumina vizibila $\lambda \in$ (4000-7800) $\overset{0}{A}$
- radiatiile infrarosii $\lambda \in$ (7800-10^7) $\overset{0}{A}$, unde $1\overset{0}{A}=10^{-10}$ m

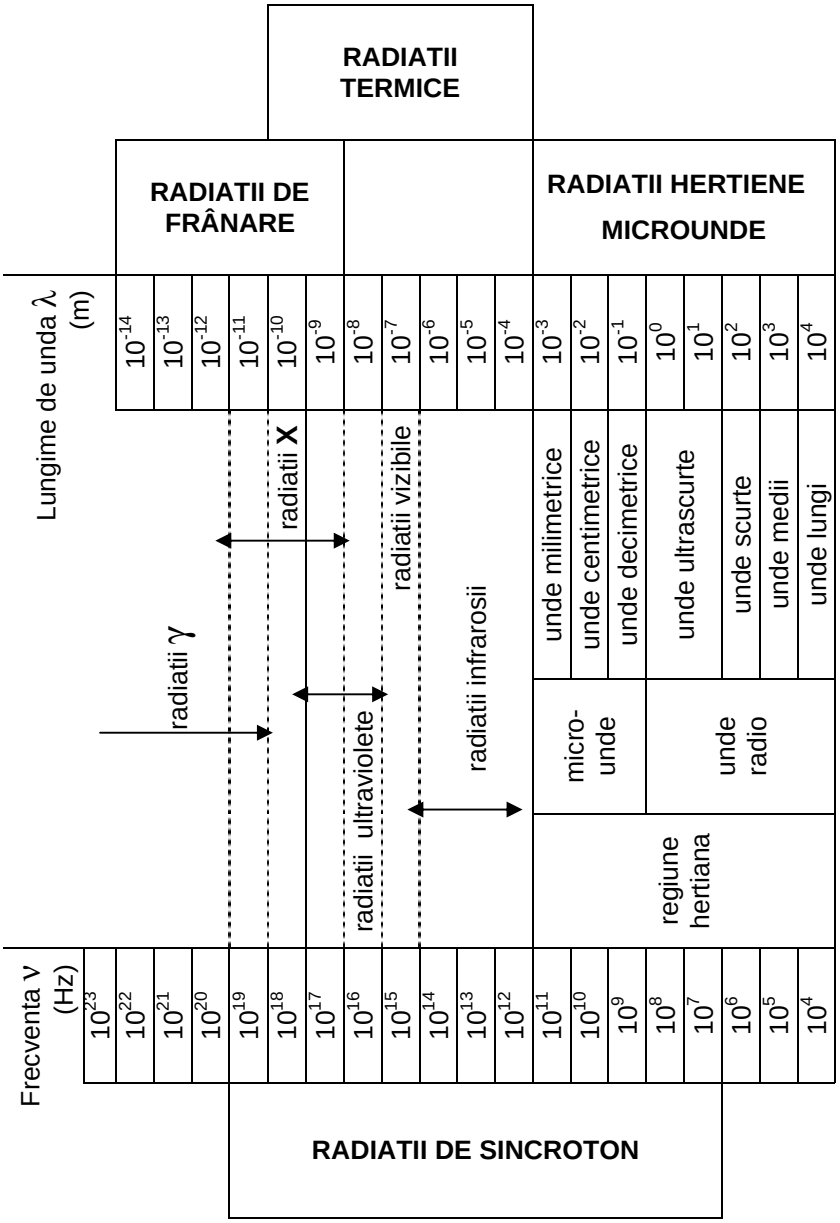


Figura 5.1

5.1. POLARIZAREA LUMINII

Conform teoriei undelor electromagnetice a lui Maxwell, pentru medii fara distributii de sarcini si curente, ecuatiile undelor vectoriale sunt date de relatiile (4.65) si (4.66), iar conform relatiei (1.14) rezulta:

- $\vec{E} = 0$ (5.1)

Aceasta ecuatie admite solutii de forma undelor plane:

$$E_x = E_{x0}\, e^{\,i\,(\omega t - 2\pi z/\lambda)}$$
$$E_y = E_{y0}\, e^{\,i\,(\omega t - 2\pi z/\lambda - \varphi)} \qquad (5.2)$$
$$E_z = E_{z0}\, e^{\,i\,(\omega t - 2\pi z/\lambda - \psi)}$$

unde E_{x0}, E_{y0}, E_{z0} sunt *amplitudini* constante *ale câmpului electric*, iar φ si ψ sunt *factori de faza* constanti.

Observatii:

1. Ecuatia $\nabla \vec{E} = 0$ conduce la conditia $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$. Rezulta $E_z = 0$, ceea ce este în concordanta cu caracterul transversal al undelor plane.
2. Rezultate similare se obtin si în cazul ecuatiei: $\vec{H} = 0$.

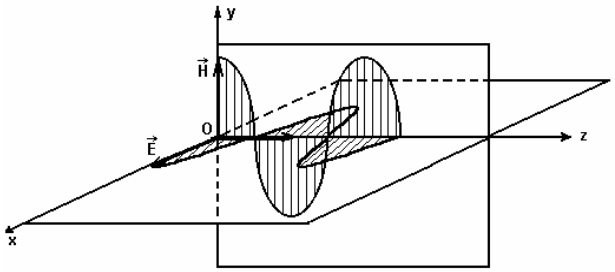


Figura 5.2

Modul de oscilatie al vectorilor $\vec{E}$ si $\vec{H}$ pentru o astfel de unda este determinat de o caracteristica a acesteia, numita *stare de polarizare a undei*. Undele luminoase, fiind unde electromagnetice, sunt unde vectoriale, plane, transversale, si deci în mod necesar polarizate.

a) Daca vectorii $\vec{E}$ si $\vec{H}$ ai undei oscileaza fiecare permanent într-un plan bine definit, unda este *polarizata liniar.* Planul în care oscileaza vectorul câmp electric se numeste *plan de vibratie*. Planul perpendicular pe planul de vibratie, în care oscileaza vectorul câmp magnetic, se numeste *plan de polarizare*.

b) Daca proiectia locului geometric al extremitatilor vectorilor $\vec{E}$ si $\vec{H}$ pe un plan perpendicular pe directia de propagare este o elipsa, unda este *polarizata eliptic*. Din compunerea componentelor câmpului electric (relatiile 5.2 cu conditia $E_z = 0$) rezulta ecuatia:

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{x0}} \cdot \frac{E_y}{E_{y0}} \cos\varphi = \sin^2\varphi \qquad (5.3)$$

Aceasta ecuatie este a unei elipse, al carei sens de parcurgere poate fi “spre dreapta” sau “spre stânga”, astfel polarizarea se numeste dupa caz, *polarizare eliptica dreapta* sau *polarizare eliptica stânga.*

Daca $\varphi = 2p\pi$, unde p = 0,±1, ±2, …, ecuatia (5.3) devine:

$$\frac{E_x}{E_{x0}} = (-1)^p \cdot \frac{E_y}{E_{y0}} \qquad (5.4)$$

ceea ce reprezinta ecuatia unei drepte care trece prin origine, deci unda este *polarizata liniar*.

Daca $\varphi = (2p+1)\frac{\pi}{2}$, unde p = 0, ±1, ±2, …, si daca $E_{x0} = E_{y0} = E_0$, ecuatia (5.3) devine:

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \qquad (5.5)$$

ceea ce reprezinta ecuatia unui cerc, deci unda este *polarizata circular*.

5.2. Reflexia si refractia luminii

Daca o unda electromagnetica cade pe o suprafata de separatie dintre doua medii cu proprietati optice diferite apar doua unde: o unda *reflectata* si o unda *transmisa* sau *refractata*.

5.2.1. Legea reflexiei si refractiei luminii

Legile reflexiei si refractiei stabilesc corelatii cantitative pentru directiile de propagare ale celor doua unde în raport cu unda incidenta.

Fie o suprafata de separatie Σ între doua medii dielectrice, omogene, izotrope, de permitivitati electrice relative ε_1 si ε_2 , permeabilitati magnetice relative $\mu_1 = \mu_2 \cong 1$, în acest caz: $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ si $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$. Vitezele de propagare ale undelor luminoase în cele doua medii sunt: $v_1 = \frac{c}{n_1}$ si $v_2 = \frac{c}{n_2}$

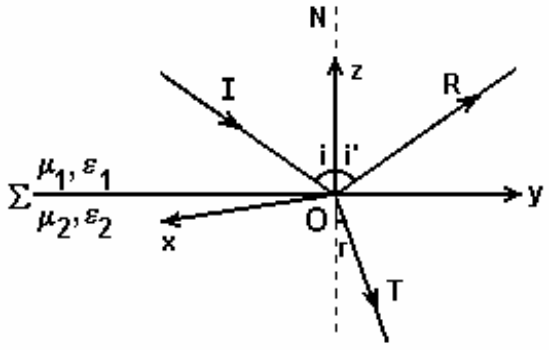


Figura 5.3.

Se considera o unda luminoasa plana, liniar polarizata, incidenta pe suparafata Σ (fig 5.3); N este normala la suprafata. Cele trei unde (incidenta I, reflectata R si transmisa T) sunt definite prin:

- vectorii câmp electric:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i0} \exp[i(\vec{k}_i \vec{r} - \omega_i t)]$$
$$\vec{E}_r = \vec{E}_{r0} \exp[i(\vec{k}_r \vec{r} - \omega_r t)] \qquad (5.6)$$
$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0} \exp[i(\vec{k}_t \vec{r} - \omega_t t)]$$

-vectorii câmp magnetic:

$$\vec{H}_i = v_1 \vec{i}_i \times \vec{E}_i$$
$$\vec{H}_r = v_1 \vec{i}_r \times \vec{E}_r \qquad (5.7)$$
$$\vec{H}_t = v_2 \vec{i}_t \times \vec{E}_t$$

unde: $\vec{i}_i$, $\vec{i}_r$ si $\vec{i}_t$ reprezinta *versorii* directiilor undelor incidenta, reflectata si respectiv transmisa.

Se defineste *planul de incidenta* ca fiind format de unda incidenta si normala (planul yOx din figura 5.3).

Orice unda plana, liniar polarizata dupa o directie oarecare, se poate descompune în doua componente, dupa directii perpendiculare: o unda în care vectorul $\vec{E}$ oscileaza în planul de incidenta, numita *unda paralela* ($\vec{E}_p$) si o unda în care vectorul $\vec{E}$ oscileaza în planul perpendicular pe planul de incidenta numita *unda normala* ($\vec{E}_n$).

Observatii:

1. Fenomenele de reflexie si refractie au loc independent pentru cele doua tipuri de unde.
2. Pentru stabilirea legilor acestor fenomene trebuie aplicate conditiile de continuitate pe suprafata de separatie pentru cele doua tipuri de unde.

Pentru componentele (incidenta, reflectata si transmisa) undei normale avem:

$$(E_{n_i} + E_{n_r})\Big|_{\Sigma} = (E_{n_t})\Big|_{\Sigma} \qquad (5.8)$$

sau:

$$\vec{E}_{ni0}\exp[i(\vec{k}_i\vec{r}_\Sigma - \omega_i t)] + \vec{E}_{nr0}\exp[i(\vec{k}_r\vec{r}_\Sigma - \omega_r t)] =$$

$$= \vec{E}_{nt0}\exp[i(\vec{k}_t\vec{r}_\Sigma - \omega_t t)] \qquad (5.9)$$

unde $\vec{r}_\Sigma$ este vectorul de pozitie al unui punct oarecare de pe suprafata Σ. Pentru ca relatia (5.9) sa fie adevarata oricare ar fi $\vec{r}_\Sigma$ si t, trebuie ca:

$$\vec{k}_i\vec{r}_\Sigma - \omega_i t = \vec{k}_r\vec{r}_\Sigma - \omega_r t = \vec{k}_t\vec{r}_\Sigma - \omega_t t \qquad (5.10)$$

Cum vectorul de unda este: $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{i} = \frac{2\pi}{t}\cdot\frac{T}{\lambda}\cdot\vec{i} = \frac{\omega}{v}\cdot\vec{i}$, rezulta din (5.10):

$$\omega_i\left(\frac{1}{v_1}\vec{i}_i\vec{r}_\Sigma - t\right) = \omega_r\left(\frac{1}{v_1}\vec{i}_r\vec{r}_\Sigma - t\right) = \omega_t\left(\frac{1}{v_2}\vec{i}_t\vec{r}_\Sigma - t\right) \qquad (5.11)$$

de unde:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega \qquad (5.12)$$

Aceasta relatie reprezinta *invarianta frecventei undelor* în fenomenele de reflexie si refractie. Tot din relatia (5.11) rezulta:

$$\vec{i}_i\vec{r}_\Sigma = \vec{i}_r\vec{r}_\Sigma = \frac{v_1}{v_2}\vec{i}_t\vec{r}_\Sigma \qquad (5.13)$$

a) Daca se presupune ca punctul oarecare de pe suprafata Σ se gaseste pe axa Oy, rezulta:

$$\vec{i}_i(\vec{r}_\Sigma)_y = 0 \qquad (5.14)$$

Cum $\vec{i}_i$ se gaseste în planul de incidenta, se obtine:

$$\vec{i}_r(\vec{r}_\Sigma)_y = \vec{i}_t(\vec{r}_\Sigma)_y = 0 \qquad (5.15)$$

Ecuatiile (5.14) si (5.15) exprima *prima lege a reflexiei-refractiei: undele incidenta, reflectata si transmisa sunt coplanare.*

b) Daca se presupune ca punctul oarecare de pe suprafata Σ se gaseste pe axa Ox, rezulta:

$$\vec{i}_i (\vec{r}_\Sigma)_x = r_\Sigma \sin i$$
$$\vec{i}_r (\vec{r}_\Sigma)_x = r_\Sigma \sin i' \qquad (5.16)$$
$$\vec{i}_t (\vec{r}_\Sigma)_x = r_\Sigma \sin r$$

unde i, i', respectiv t reprezinta unghiurile dintre raza incidenta si normala, respectiv dintre reflectata si normala si dintre transmisa si normala (fig. 5.3). Din relatiile (5.6) rezulta:

$$i = i'$$
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} = n \qquad (5.17)$$

Ecuatiile exprima *a doua lege a reflexiei-refractiei*: *unghiul de incidenta este egal cu unghiul de reflexie, iar raportul sinusurilor unghiurilor de incidenta si de refractie este egal cu raportul dintre vitezele cu care se propaga undele incidenta si transmisa în mediile respective.*

5.2.2 Formulele lui Fresnel

Formulele lui Fresnel stabilesc corelatii cantitative pentru amplitudinile celor doua unde (reflectata si transmisa) în raport cu unda incidenta. Pentru simplificarea calculului, se considera undele ca fiind de tip sinusoidal.

Componentele undei incidente sunt:

- paralele: $E_{pi} \sin \omega(t - \frac{r}{v_1})$, $H_{pi} \sin \omega(t - \frac{r}{v_1})$ (5.18)

- normale: $E_{ni} \sin \omega(t - \frac{r}{v_1})$, $H_{ni} \sin \omega(t - \frac{r}{v_1})$ (5.19)

Componentele undei reflectate sunt:

- paralele: $E_{pr} \sin \omega(t - \frac{r'}{v_1})$, $H_{pr} \sin \omega(t - \frac{r'}{v_1})$ (5.20)

- normale: $E_{nr} \sin \omega(t - \frac{r'}{v_1})$, $H_{nr} \sin \omega(t - \frac{r'}{v_1})$ (5.21)

Componentele undei transmise sunt:

- paralele: $E_{pt} \sin \omega(t - \frac{r''}{v_1})$, $H_{pt} \sin \omega(t - \frac{r''}{v_1})$ (5.22)

- normale: $E_{nt} \sin \omega(t - \frac{r''}{v_1})$, $H_{nt} \sin \omega(t - \frac{r''}{v_1})$ (5.23)

a) Cazul I

Se studiaza reflexia si refractia unei unde electromagnetice care are numai componenta paralela a câmpului electric ($\vec{E}_p$) în planul de incidenta. În aceasta situatie, vectorul câmp magnetic este perpendicular pe planul de incidenta ($\vec{H}_n$).

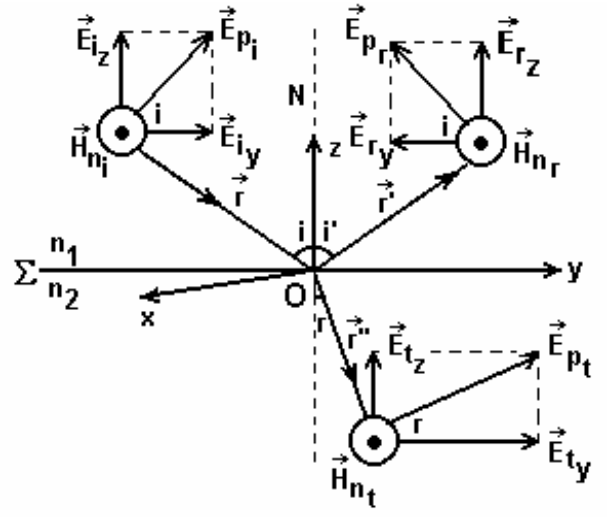


Figura 5.4

Considerând semnul plus în sensul de crestere a unei coordonate, razele vectoare pentru vectorii câmp electric, respectiv magnetic sunt:

$r = y \sin i - z \cos i$

$r' = y \sin i + z \cos i$

$r'' = y \sin r - z \cos r$

Conform relatiilor (5.7) vom avea:

$$H_{ni} = v_1 E_{pi}$$
$$H_{nr} = v_1 E_{pr} \qquad (5.25)$$
$$H_{nt} = v_2 E_{pt}$$

În aceste conditii rezulta:

- componentele vectorului câmp electric pentru unda incidenta:

$$E_{i\,x} = 0$$
$$E_{i\,y} = E_{pi} \cos i \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i - z \cos i}{v_1} \right) \qquad (5.26)$$
$$E_{i\,z} = E_{pi} \sin i \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i - z \cos i}{v_1} \right)$$

- componentele vectorului câmp magnetic pentru unda incidenta:

$$H_{i\,x} = H_{ni} \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i - z \cos i}{v_1} \right)$$
$$H_{i\,y} = 0 \qquad (5.27)$$
$$H_{i\,z} = 0$$

- componentele vectorului câmp electric pentru unda reflectata:

$$E_{r\,x} = 0$$
$$E_{r\,y} = - E_{p\,r} \cos i \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i + z \cos i}{v_1} \right) \qquad (5.28)$$
$$E_{r\,z} = E_{p\,r} \sin i \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i + z \cos i}{v_1} \right)$$

- componentele vectorului câmp magnetic pentru unda reflectata:

$$H_{r\,x} = H_{nr}\ \sin\omega\left(t - \frac{y\ \sin i + z\ \cos i}{v_1}\right)$$

$$H_{r\,y} = 0 \qquad (5.29)$$

$$H_{r\,z} = 0$$

- componentele vectorului câmp electric pentru unda transmisa:

$$E_{t\,x} = 0$$

$$E_{t\,y} = E_{p\,t}\cos r \sin\omega\left(t - \frac{y\ \sin r - z\ \cos r}{v_2}\right) \qquad (5.30)$$

$$E_{t\,z} = E_{p\,t}\sin r \sin\omega\left(t - \frac{y\ \sin r - z\ \cos r}{v_2}\right)$$

- componentele vectorului câmp magnetic pentru unda transmisa:

$$H_{t\,x} = H_{n\,t}\ \sin\omega\left(t - \frac{y\ \sin r - z\ \cos r}{v_2}\right)$$

$$H_{t\,y} = 0 \qquad (5.31)$$

$$H_{t\,z} = 0$$

La trecerea dintr-un mediu în celalalt, componenta câmpului electric paralela cu suprafata de separatie ramâne neschimbata. Atunci pentru z = 0:

$$E_{i\,y} + E_{r\,y} = E_{t\,y} \qquad (5.32)$$

$$H_{i\,x} + H_{r\,x} = H_{t\,x} \qquad (5.33)$$

Se considera ca $n_1 = c/v_1$ si $n_2 = c/v_2$; de asemenea: $H_{in} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_{ip} = n_1\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\ E_{ip}$. Cum $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, la $z = 0$ toate argumentele din paranteze sunt egale pentru toate componentele. Atunci:

$$E_{pi}\cos i \sin\omega\left(t - \frac{y\ \sin i}{v_1}\right) -$$

$$- E_{p\,r}\cos i \sin\omega\left(t - \frac{y\ \sin i}{v_1}\right) =$$

$$= E_{p\,t}\cos r \sin\omega\left(t - \frac{y\ \sin r}{v_2}\right) \qquad (5.34)$$

$$H_{ni}\sin\omega\left(t - \frac{y\ \sin i}{v_1}\right) + H_{nr}\sin\omega\left(t - \frac{y\ \sin i}{v_1}\right) =$$

$$= H_{n\,t}\sin\omega\left(t - \frac{y\ \sin r}{v_2}\right) \qquad (5.35)$$

Dar: $\frac{y\ \sin i}{v_1} = \frac{y\ \sin r}{v_2}$ (vezi relatia 5.17), deci argumentele functiilor sinus sunt egale. Atunci relatiile (5.34) si (5.35) devin:

$$(E_{p\,i} - E_{p\,r})\cos i = E_{p\,t}\cos r \qquad (5.36)$$

$$n_1\,(E_{p\,i} - E_{p\,r}) = n_2\,E_{p\,t} \qquad (5.37)$$

Din ultima relatie se obtine (conform 5.7 si 5.25):

$$(E_{p\,i} + E_{p\,r})\sin i = E_{p\,t}\sin r \qquad (5.38)$$

În acest caz, amplitudinile câmpului electric din raza reflectata si din cea transmisa, în raport cu cea din raza incidenta sunt:

$$E_{r\,p} = E_{i\,p}\ \frac{\mathrm{tg}(i-r)}{\mathrm{tg}(i+r)} \qquad (5.39)$$

$$E_{t\,p} = E_{i\,p}\ \frac{2\cos i \sin r}{\sin(i+r)\cos(i-r)} \qquad (5.40)$$

Ultimele doua relatii constituie *formulele lui Fresnel pentru componenta paralela a câmpului electric ($\vec{E}_p$) în planul de incidenta*.

b) Cazul II

Se studiaza reflexia si refractia unei unde electromagnetice care are numai componenta paralela a câmpului magnetic ($\vec{H}_p$) în planul de incidenta. În aceasta situatie, vectorul câmp electric este perpendicular pe planul de incidenta ($\vec{E}_n$).

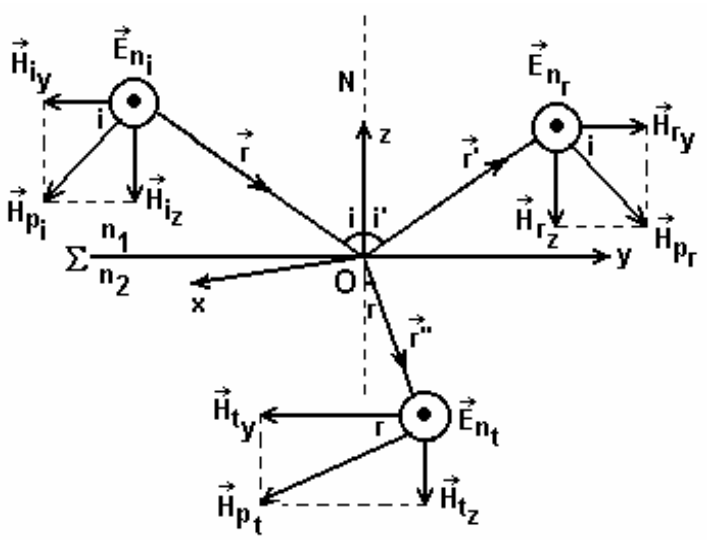


Figura 5.5

Relatiile (5.24) si (5.25) ramân valabile si în acest caz. În aceste conditii rezulta:

- componentele vectorului câmp electric pentru unda incidenta:

$$E_{ix} = E_{ni} \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i - z \cos i}{v_1} \right)$$

$$E_{iy} = 0 \qquad (5.41)$$

$$E_{iz} = 0$$

- componentele vectorului câmp magnetic pentru unda incidenta:

$$H_{ix} = 0$$

$$H_{iy} = -H_{pi} \cos i \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i - z \cos i}{v_1} \right) \qquad (5.42)$$

$$H_{iz} = -H_{pi} \sin i \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i - z \cos i}{v_1} \right)$$

- componentele vectorului câmp electric pentru unda reflectata:

$$E_{rx} = E_{nr} \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i + z \cos i}{v_1} \right)$$

$$E_{ry} = 0 \qquad (5.43)$$

$$E_{rz} = 0$$

- componentele vectorului câmp magnetic pentru unda reflectata:

$$H_{rx} = 0$$

$$H_{ry} = H_{pr} \cos i \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i + z \cos i}{v_1} \right) \qquad (5.44)$$

$$H_{rz} = - H_{pr} \sin i \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i + z \cos i}{v_1} \right)$$

- componentele vectorului câmp electric pentru unda transmisa:

$$E_{tx} = E_{pt} \sin \omega \left(t - \frac{y \sin r - z \cos r}{v_2} \right)$$

$$E_{ty} = 0 \qquad (5.45)$$

$$E_{tz} = 0$$

- componentele vectorului câmp magnetic pentru unda transmisa:

$$H_{t\,x} = 0$$

$$H_{t\,y} = -H_{p\,t} \cos r \sin \omega \left(t - \frac{y \sin r - z \cos r}{v_2} \right) \quad (5.46)$$

$$H_{t\,z} = -H_{p\,t} \sin r \sin \omega \left(t - \frac{y \sin r - z \cos r}{v_2} \right)$$

Pentru z = 0 se obtine:

$$E_{i\,x} + E_{r\,x} = E_{t\,x} \quad (5.47)$$

$$H_{i\,y} + H_{r\,y} = H_{t\,y} \quad (5.48)$$

Atunci:

$$E_{n\,i} \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i}{v_1} \right) + E_{n\,r} \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i}{v_1} \right) =$$

$$= E_{n\,t} \cos r \sin \omega \left(t - \frac{y \sin r}{v_2} \right) \quad (5.49)$$

$$- H_{pi} \cos i \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i}{v_1} \right) +$$

$$+ H_{pr} \cos i \sin \omega \left(t - \frac{y \sin i}{v_1} \right) =$$

$$= - H_{p\,t} \cos r \sin \omega \left(t - \frac{y \sin r}{v_2} \right) \quad (5.50)$$

Cum argumentele functiilor sinus sunt egale, atunci relatiile (5.49) si (5.50) devin:

$$E_{n\,i} + E_{n\,r} = E_{n\,t} \quad (5.51)$$

$$(H_{p\,i} - H_{p\,r}) \cos i = H_{p\,t} \cos r \quad (5.52)$$

Dupa calcule similare cazului anterior, rezulta:

$$E_{n\,r} = -E_{n\,i} \frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)} \quad (5.53)$$

$$E_{n\,t} = E_{n\,i} \frac{2 \cos i \sin r}{\sin (i + r)} \quad (5.54)$$

Ultimele doua relatii constituie *formulele lui Fresnel pentru componenta normala a câmpului electric ($\vec{E}_n$) în planul de incidenta*.

CAPITOLUL 6. INTERFERENTA LUMINII

6.1. Principii ale interactiei undelor

6.1.1. Principiul superpozitiei undelor si fenomenul de interferenta.

În cazul superpozitiei a n unde, principiul este: daca într-un punct al unui mediu liniar ajung simultan mai multe unde de aceeasi natura, descrise de functiile de unda Ψ_i, în punctul considerat se obtine o unda rezultanta:

$$\vec{\Psi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\Psi}_i \qquad (6.1)$$

ale carei caracteristici depind de cele ale undelor Ψ_i. În anumite conditii, distributia intensitatii undei rezultante prezinta maxime si minime, rezultate în urma procesului de interactie dintre unde. Acest fenomen se numeste *interferenta*.

Conditiile în care se realizeaza acest fenomen presupun ca undele care interfera sa fie *coerente*. Doua unde sunt coerente daca au aceeasa frecventa, iar diferenta de faza dintre ele este constanta în timp. Nu se observa fenomenul de interferenta daca undele nu sunt coerente, sau daca sunt polarizate în planuri reciproc perpendiculare.

Exista doua metode de a obtine de la aceeasi sursa mai multe unde coerente:
- *metoda divizarii suprafetei echifaza*, în care sursa are dimensiuni mici, iar unda este divizata la trecerea prin fante alaturate. Undele care interfera provin din puncte diferite ale aceleeasi suprafete echifaza a undei incidente;
- *metoda divizarii în amplitudine*, în care sursa este puternica. Undele care interfera provin prin divizarea unde initiale, în acelasi punct, prin reflexie partiala si refractie, prin dubla refractie, etc.

6.1.2. Principiul lui Huygens

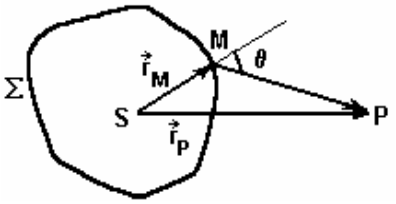


Figura 6.1

Fie o sursa primara de oscilatie S care generea-za unde într-un mediu, iar Σ o suprafata auxiliara care înconjoara sursa primara (fig.6.1). Fiecare punct M de pe suprafata Σ în care ajunge frontul de unda pri-mar devine sursa de unde secundare, astfel încât în punctul P apare rezultanta suprapunerii undelor emise de distributia corespunzatoare de surse secundare (virtuale) de pe suprafata. Deci unda primara poare fi înlocuita de un sistem de unde secundare coerente care interfera în orice punct din spatiu. Rezulta:

$$\vec{\Psi}(P) = \oint_{\Sigma} d\vec{\Psi}(M) \qquad (6.2)$$

Pentru ca aceasta relatie sa fie corecta, Fresnel a introdus – în mod conventional – un *factor de oblicitate:*

$$q(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad (6.3)$$

unde θ este unghiul dintre directia de propagare si normala la suprafata Σ în punctul considerat.

6.2 Modele de analiza a interferentei optice

6.2.1 Interferenta a doua unde generate de o sursa punctuala

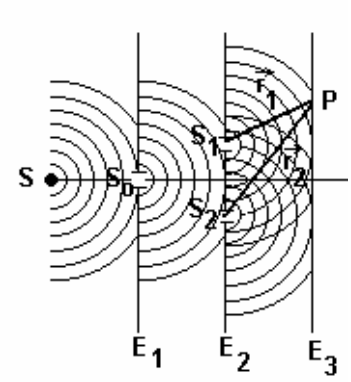


Figura 6.2

Sursele optice emit radiatie discontinuu, sub forma unor trenuri de unde, cu durata de 10^{-8} s. Perioadele radiatiei din spectrul optic sunt de 10^{-15} s. Durata minima de observare pentru ochiul omenesc, este de 10^{-1} s, deci ceea ce noi observam este o intensitate medie a radiatiei luminoase. Detectorii optici raspund la energia radiatiei incidente (nu la amplitudine), care este proportionala cu intensitatea radiatiei incidente si cu timpul τ de înregistrare.

Fie doua unde armonice plane, care sosesc în punctul P de la doua surse optice S_1 si S_2 obtinute prin dedublarea unei surse primare S, considerata punctuala (fig.6.2)

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 r_1 - \phi_1) \qquad (6.4)$$
$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{02} \cos(\omega_2 t - k_2 r_2 - \phi_2)$$

unde r_1 si r_2 sunt drumurile optice de la surse pâna la punctul P. *Intensitatea medie a undei* este:

$$I = <\vec{Y}> = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \left|\vec{E}\times\vec{H}\right| dt = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \vec{E}^2 dt = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} < \vec{E}^2 > \qquad (6.5)$$

În relatia anterioara se pot considera unitati de $(V/m)^2$ - în loc de W/m^2, deci:

$$I = < \vec{E}^2 > \qquad (6.6)$$

Intensitatea luminoasa în punctul M va fi, conform principiului suprapunerii undelor:

$$I = <\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)^2> = <\vec{E}_1^2> + <\vec{E}_2^2> + 2<\vec{E}_1\,\vec{E}_2> = I_1 + I_2 + I_{12} \qquad (6.7)$$

unde I_{12} este un termen de interferenta:

$$I_{12} = \vec{E}_{01}\vec{E}_{02} \cdot \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} \cos(\omega_1 t - k_1 r_1 - \varphi_1)\cos(\omega_2 t - k_2 r_2 - \varphi_2)\, dt =$$

$$= \vec{E}_{01}\,\vec{E}_{01} \cdot \frac{1}{t}\int_0^{t} \cos\left(?_1 t - k_1 r_1 - j_1 + ?_2 t - k_2 r_2 - j_2\right) dt +$$

$$+ \vec{E}_{01}\,\vec{E}_{01} \cdot \frac{1}{t}\int_0^{t} \cos\left(?_1 t - k_1 r_1 - j_1 - ?_2 t + k_2 r_2 + j_2\right) dt \qquad (6.8)$$

Rezulta:

$$I_{12} = \vec{E}_{01}\,\vec{E}_{01} \cdot \frac{1}{t}\left[\int_0^{t} \cos\left[(?_1 + ?_2)t - (k_1 r_1 + k_2 r_2) - (j_1 + j_2)\right] dt\right] +$$

$$+ \int_0^{t} \cos\left[(?_1 - ?_2)t - (k_1 r_1 - k_2 r_2) - (j_1 - j_2)\right] dt \qquad (6.9)$$

Primul termen din relatia (6.9) are sub integrala o cantitate care variaza rapid în timp, deci prin mediere, se va anula. Rezulta:

$$I_{12} = \vec{E}_{01}\;\vec{E}_{02} \cdot \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \cos\left[(\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1 - \varphi_2) - (k_1 r_1 - k_2\, r_2)\right] dt =$$

$$= \vec{E}_{01}\vec{E}_{02}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \{\cos[(\omega_1 - \omega_2)\, t - (\varphi_1 - \varphi_2)] \cos(k_1 r_1 - k_2 r_2) +$$

$$+ \sin[(\omega_1 - \omega_2)\, t - (\varphi_1 - \varphi_2)] \sin(k_1 r_1 - k_2 r_2)\}\, dt \qquad (6.10)$$

Termenul $(k_1r_1 - k_2r_2)$ nu depinde de timp, deci va iesi în fata integralei.

$$I_{12} = \vec{E}_{01}\vec{E}_{02}\frac{1}{\tau}\{\cos(k_1r_1 - k_2r_2)\int_0^{\tau} \cos[(\omega_1 - \omega_2)\, t - (\varphi_1 - \varphi_2)]\, dt +$$

$$+ \sin(k_1r_1 - k_2r_2)\int_0^{\tau} \sin[(\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1 - \varphi_2)]dt \qquad (6.11)$$

Pentru ca termenul de interferenta I_{12} sa nu fie nul, trebuie ca mediile temporale din expresia (6.11) sa nu fie nule simultan. Acest lucru este posibil daca undele $\vec{E}_1$ si $\vec{E}_2$ sunt corelate prin fenomenul de emisie, astfel încât sa îndeplineasca urmatoarele conditii:

$\varphi_1 = \varphi_2$

$\omega_1 = \omega_2$

$k_1 = k_2$

Atunci:

$$I_{12} = \vec{E}_{01}\vec{E}_{02}\frac{1}{\tau}\cos k(r_1 - r_2)\int_0^{\tau} dt =$$

$$= \vec{E}_{01}\vec{E}_{02}\cos k(r_1 - r_2) \qquad (6.12)$$

Acest lucru este posibil daca undele apartin aceluiasi grup de unde. De asemenea, un fapt atestat experimental este ca undele nu trebuie sa fie în plane reciproc perpendiculare:

$$\vec{E}_{01}\vec{E}_{02} \neq 0$$

În general, directiile de polarizare ale vectorilor $\vec{E}_{01}$ si $\vec{E}_{02}$ fac un unghi α, încât:

$$\vec{E}_{01}\vec{E}_{02} = E_{01}E_{02}\cos\alpha = 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\alpha \qquad (6.13)$$

Deci, pentru un timp $\tau >> \tau_g$ (τ_g = durata unui grup de unde) exista un interval ($\gamma_{12}\tau$) în care se suprapun undele apartinând aceluiasi grup de unde:

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\alpha k(r_1 - r_2) = 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\alpha\cos\Delta\varphi(r) \qquad (6.14)$$

În restul intervalului, adica pentru $\tau\,(1 - \gamma_{12})$, $I_{12} = 0$. Se observa ca:

$$|\gamma_{12}| \in [0;1] \qquad (6.15)$$

Cu ajutorul marimii γ_{12} se poate descrie *gradul de coerenta* al celor doua unde.

6.2.2 Interferenta a doua unde monocromatice

Daca sunt stabilite, în mod strict, conditiile:

$$\omega_1 = \omega_2$$
$$k_1 = k_2 = k \qquad (6.16)$$
$$\varphi_1 = \varphi_2$$

atunci undele sunt monocromatice, infinit extinse si $\gamma_{12} = 1$. Daca undele sunt polarizate dupa aceeasi directie ($\alpha = 0$), relatia(6.14) devine:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos[\Delta\varphi(r) + \Delta\varphi(t) \qquad (6.17)$$

unde: $\Delta\varphi(t) = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$. Daca $\Delta\varphi(t)$ este constanta în timp, interferenta se numeste *stationara*, iar undele se numesc *coerente*.

Pentru $\Delta\varphi(t) = 0$ avem

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi(r) \qquad (6.18)$$

se obtin *maxime de interferenta* pentru:

$$\cos\Delta\varphi(r) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi(t) = 2p\pi, \quad p = 0; \pm1; \pm2; \ldots \qquad (6.19)$$

Dar:

$$\Delta\varphi(t) = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \qquad (6.20)$$

Atunci, din (6.19) si (6.20) rezulta:

$$r_1 - r_2 = p\lambda = 2p\frac{\lambda}{2} \qquad (6.21)$$

Deci maximele de interferenta se obtin cand diferenta dintre drumurile optice este un numar *par* de $\frac{\lambda}{2}$.

Se obtin *minime de interferenta* pentru:

$$\cos\Delta\varphi(r) = -1$$

$$\Delta\varphi(t) = (2p+1)\pi, \quad p = 0; \pm1; \pm2; \ldots \qquad (6.22)$$

Atunci din (6.22) si (6.20) rezulta:

$$r_1 - r_2 = (2p+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (6.23)$$

Deci minimele de interferenta se obtin cand diferenta dintre drumurile optice este un numar *impar* de $\frac{\lambda}{2}$.

Din reprezentarea grafica a ecuatiei (6.21) rezulta hiperboloizi cu doua pânze, confocali, ale caror focare sunt situate în punctele în care se gasesc sursele S_1 si S_2 (fig.6.3), iar locul punctelor de maxim este dat de relatiile:

$$\begin{aligned} &r_1 - r_2 = 0 \\ &r_1 - r_2 = \lambda \\ &r_1 - r_2 = 2\lambda \qquad (6.24) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &r_1 - r_2 = p\lambda \end{aligned}$$

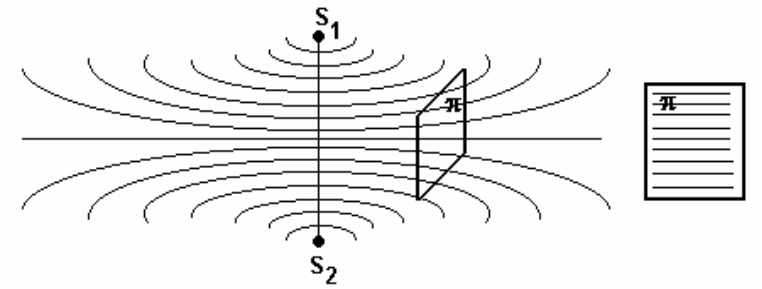
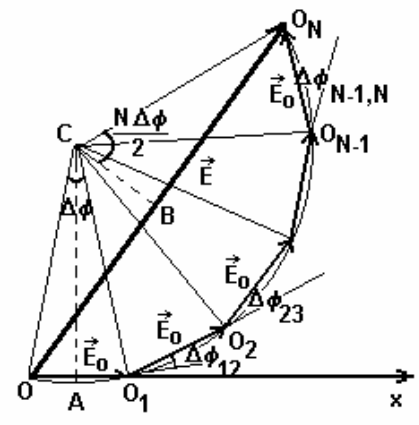


Figura 6.3

Daca se intersecteaza familia de hiperboloizi cu un plan π, paralel cu axa S_1S_2, se obtin franjele de interferenta. Pentru un domeniu de observatie de dimensiuni reduse, fiecare hiperbola se confunda cu tangenta sa, iar franjele sunt – în aparenta - rectilinii. Pentru $\Delta\varphi(t) \neq 0$ se observa o deplasare a sistemului de franje. De exemplu, pentru $\Delta\varphi(t) = \pi$, maximele iau locul minimelor si invers. În concluzie, daca $\Delta\varphi(t)$ este constanta, interferenta este *stationara*, iar daca $\Delta\varphi(t)$ nu este constanta, interferenta este *nestationara*.

6.2.3 Interferenta multipla



Acest fenomen apare atunci când se supra-pun N unde coerente, iar între fazele lor exista anumite relatii bine determinate. Se consi-dera cazul particular, în care cele N unde au amplitudinile egale si diferentele de faza

$\Delta\varphi_{i,\,i+1} = \Delta\varphi = \text{const}$

Figura 6.4

a) Studiu grafic

Fie cei N vectori $\vec{E}_0$ plasati pe un cerc de raza CO = r , pentru care:

$$\Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{23} = \ldots = \Delta\varphi_{N-1,\,N} = \Delta\varphi$$

Vectorul rezultant $\vec{E}$ se obtine prin unirea originii primului vector (O) cu capatul ultimului vector (O_N). Din ΔCOO_1 rezulta:

$$\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{E_0/2}{r} \qquad (6.25)$$

Din ΔCOB rezulta:

$$\sin\frac{N\Delta\varphi}{2} = \frac{E/2}{r} \qquad (6.26)$$

Prin împartirea celor doua relatii se obtine:

$$\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}} = \frac{E_0}{E} \quad \Rightarrow \quad E = E_0\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} \qquad (6.27)$$

Având în vedere relatia (6.6), rezulta:

$$I = I_0\frac{\sin^2\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}} \qquad (6.28)$$

b) Studiu analitic

Cele N unde coerente au forma:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0\cos(\omega t - kr)\\ E_2 &= E_0\cos(\omega t - kr + \Delta\varphi)\\ E_3 &= E_0\cos(\omega t - kr + 2\Delta\varphi) \qquad (6.29)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ E_N &= E_0\cos(\omega t - kr + (N-1)\Delta\varphi) \end{aligned}$$

sau, considerând doar partea reala a expresiilor:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0\exp(\omega t - kr) = E_0\exp(\omega t - kr)\\ E_2 &= E_0\exp(\omega t - kr + \Delta\varphi) = E_0\exp(\omega t - kr)\exp\Delta\varphi\\ E_3 &= E_0\exp(\omega t - kr + 2\Delta\varphi) = E_0\exp(\omega t - kr)\exp 2\Delta\varphi\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ E_N &= E_0\exp(\omega t - kr + (N-1)\Delta\varphi) =\\ &= E_0\exp(\omega t - kr)\exp(N-1)\Delta\varphi \qquad (6.30) \end{aligned}$$

Atunci unda rezultanta va fi:

$$E = \sum_i E_i = E_0 e^{i(?\,t - kr)}\left[1 + e^{i?\,j} + e^{2i?\,j} + \ldots.. + e^{(N-1)i?\,j}\right] \qquad (6.31)$$

Progresia geometrica din relatia (6.31) are ratia $e^{i\Delta\varphi}$. În acest caz, suma din paranteza se mai poate scrie:

$$S=\frac{e^{iN\Delta\varphi}-1}{e^{i\Delta\varphi}-1}=\frac{e^{\frac{iN\Delta\varphi}{2}}}{e^{\frac{i\Delta\varphi}{2}}}\cdot\frac{\frac{1}{2i}\cdot\left(e^{\frac{iN\Delta\varphi}{2}}-e^{-\frac{iN\Delta\varphi}{2}}\right)}{\frac{1}{2i}\cdot\left(e^{\frac{i\Delta\varphi}{2}}-e^{-\frac{i\Delta\varphi}{2}}\right)}=e^{\frac{i(N-1)\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} \qquad (6.32)$$

Atunci unda rezultanta va fi:

$$E=E_0\,e^{i(\omega t-kr)}\,e^{\frac{i(N-1)\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} \qquad (6.33)$$

cu amplitudinea $E_r=E_0\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}$. In concluzie:

$$I=I_0\frac{\sin^2\frac{N?j}{2}}{\sin^2\frac{?j}{2}},$$

care este chiar relatia (6.28)

Observatii:

-Se obtin *minime de interferenta* (I = 0) pentru:

$$\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta\varphi=\frac{p}{N}\cdot 2\pi \qquad (6.34)$$

unde: p = ±1; ±2; …±(N-1); ±(N+1); …±(2N-1); ±(2N+1); …deoarece în punctele cu p = ±N; ±2N; … se obtine nedeterminare.

-Pentru calculul limitei se aplica relatiei (6.27) regula lui l'Hospital:

$$\lim_{?j\to o}\frac{\sin\frac{N?j}{2}}{\sin\frac{?j}{2}}=N \qquad (6.35)$$

Deci pentru $\Delta\varphi=\frac{p}{N}\cdot 2\pi$ unde: p = ±N; ±2N; … rezulta maximele:

$$I=N^2\,I_o \qquad (6.36)$$

care se numesc *maxime principale*.

- S-a observat ca între doua maxime principale se gasesc (N-1) minime. Cum doua minime consecutive trebuie sa fie separate printr-un maxim, rezulta ca între (N-1) minime exista (N-2) maxime secundare. Pozitiile maximelor secundare se stabilesc din conditia de maxim:

$$\frac{dI}{d(\Delta\varphi)}=0 \qquad (6.37)$$

de unde se obtine ecuatia transcendenta:

$$\operatorname{tg}\frac{N\Delta\varphi}{2}=N\cdot\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2} \qquad (6.38)$$

Aceasta ecuatie admite solutiile $\Delta\varphi=(2p+1)\frac{\pi}{N}$. Având în vedere exprimarea sinusului în functie de tangenta, precum si relatia (6.38) ridicata la patrat, intensitatea maximelor secundare va fi:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{N? j}{2}}{\sin^2 \frac{? j}{2}} = I_0 \frac{\frac{tg^2 \frac{N? j}{2}}{1 + tg^2 \frac{N? j}{2}}}{\sin^2 \frac{? j}{2}} =$$

$$= I_0 \frac{\frac{N^2 \sin^2 \frac{? j}{2}}{\cos^2 \frac{? j}{2} + N^2 \sin^2 \frac{? j}{2}}}{\sin^2 \frac{? j}{2}}$$

$$= I_0 \frac{N^2}{1 + (N^2 - 1)\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}} \qquad (6.39)$$

Pentru un numar (N) mare de unde care interfera, se poate face aproximatia:

$$\sin \Delta\varphi \cong \Delta\varphi = (2p + 1) \frac{\pi}{N}$$

Atunci relatia (6.39) devine:

$$I = I_0 \frac{N^2}{1 + (N^2 - 1)(2p + 1)\frac{p^2}{4N^2}} \qquad (6.40)$$

Se observa ca intensitatea maximelor secundare scade cu patratul numerelor impare succesive.

6.3. Dispozitive interferentiale

6.3.1. Dispozitiv inteferential cu doua unde. Dispozitivul lui Young.

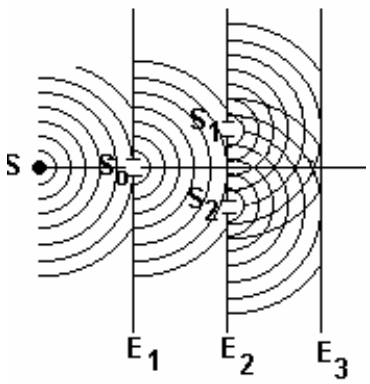


Figura 6.5

Este un interferential tipic în care undele care interfera se obtin prin divizarea frontului de unda. Conform principiului lui Huygens – Fresnel, fantele S_1 si S_2 practicate în ecranul E_2 devin surse secundare de oscilatii. Undele provenind de la aceste doua surse se suprapun într-o regiune din spatiu numita *câmp de interferenta.*

Sa determinam pozitia franjelor de interferenta (luminoase sau întunecate, deci maxime sau minime) vizibile pe ecranul E_3. In figura 6.6. se considera ca o franja de interferenta apare pe ecranul E_3, la o distanta x_p (= OP) de axa sistemului (SO). Cele doua unde care se suprapun în punctul respectiv au drumurile optice r_1, respectiv r_2. Din conditia ca diferenta de drum $\Delta r = r_1 - r_2$ sa fie un numar par (sau impar) de $\lambda / 2$, se va obtine o franja luminoasa (respectiv întunecata).

Sursele S_1 si S_2 se gasesc la distanta l una de cealalta. Între ecranele E_2 si E_3 este distanta D >> l. Atunci diferenta de drum optic Δr se poate aproxima ca fiind S_2R unde R este piciorul perpen-dicularei coborâte din S_1 pe S_2P. Din asemanarea triunghiurilor S_1S_2P si S_1TP se poate determina pozitia (x_p) franjelor de interferenta. În ΔS_1S_2R avem:

$S_1R \perp S_2P$; $S_2R = S_2P - S_1P = r_2 - r_1 = \Delta r$;

$S_1S_2 = l$; $\sin\alpha = \frac{S_2R}{S_1S_2} = \frac{\Delta r}{l}$

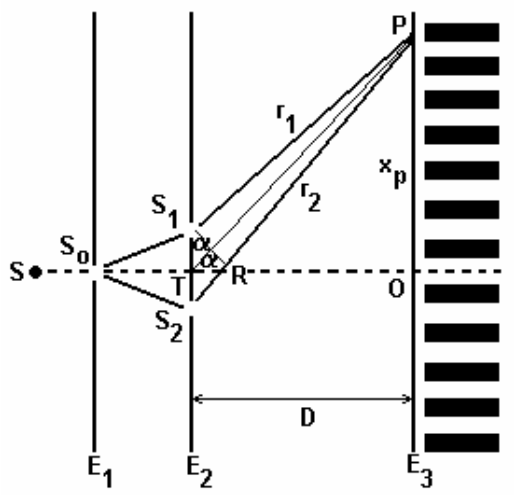


Figura 6.6

În ΔTOP avem:

$TO = D$; $PO = x_p$; $tg\alpha = \frac{PO}{TO} = \frac{x_p}{D}$

Pentru unghiuri mici: $\sin\alpha \cong tg\,\alpha \cong \alpha$; rezulta:

$$\frac{\Delta r}{l} = \frac{x_p}{D} \qquad (6.41)$$

de unde:

$$x_p = \frac{D}{l} \cdot \Delta r \qquad (6.42)$$

În cazul maximelor de interferenta - *franje luminoase* ($\Delta r = 2p\frac{\lambda}{2}$; p = 1,2,3,…):

$$x_p = \frac{D}{l} \cdot 2p\frac{\lambda}{2} \qquad (6.43)$$

Distanta dintre doua maxime consecutive este: $x_{p+1} - x_p = \frac{D}{l}2(p+1)\frac{\lambda}{2} - \frac{D}{l} \cdot 2p\frac{\lambda}{2} = \frac{D\lambda}{l}$

În cazul minimelor de interferenta-*franje întunecate* ($\Delta r = (2p+1)\frac{\lambda}{2}$; p=1,2,3,…):

$$x_p = \frac{D}{l} \cdot (2p+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (6.44)$$

Distanta dintre doua minime consecutive este:

$$x_{p+1} - x_p = \frac{D}{l}[2(p+1)+1]\frac{\lambda}{2} - \frac{D}{l} \cdot (2p+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{D\lambda}{l}$$

Se constata ca *distanta dintre doua maxime consecutive este egala cu distanta dintre doua minime consecutive*. Aceasta marime se numeste *interfranja*:

$$i = \frac{D\lambda}{l}$$

In concluzie, franjele de interferenta (atât cele luminoase, cât si cele întunecate) sunt paralele si echidistante. În punctul central O apare o franja luminoasa pentru ca $\Delta r = 0$ în acest punct.

Intensitatea undei rezultante este data de $\langle \vec{E}^2 \rangle$ (relatia 6.6):

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega t - kr_1 - \varphi) + E_0 \cos(\omega t - kr_2 - \varphi) = \\ &= 2E_0 \cos\frac{k(r_2 - r_1)}{2} \cdot \cos\left(\omega t - k\frac{r_1 + r_2}{2} - \varphi\right) = \\ &= 2E_0 \cos\frac{\pi}{\lambda} \cdot \Delta r \cos\left(\omega t - k\frac{r_1 + r_2}{2} - \varphi\right) \end{aligned} \qquad (6.46)$$

Având în vedere relatiile (6.41) si (6.45), rezulta:

$$\begin{aligned} E &= 2E_0 \cos\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{l}{D} x_p \cos\left(\omega t - k\frac{r_1 + r_2}{2} - \varphi\right) = \\ &= 2E_0 \cos\frac{\pi x_p}{i} \cos\left(\omega t - k\frac{r_1 + r_2}{2} - \varphi\right) \end{aligned} \qquad (6.47)$$

Atunci intensitatea va fi proportionala cu:

$$I \approx 4E_0^2 \cos^2\frac{\pi x_p}{i} \qquad (6.48)$$

Se vede ca intensitatea franjelor este o functie periodica de x_p, perioada fiind egala cu interfranja i. De asemenea intensitatea variaza între valorile $[0,4\ E_0^2]$. Deci exista puncte în care *intensitatea undei rezultante este mai mare decât suma intensitatilor undelor componente*.

6.3.2. Dispozitiv interferential de unde multiple. Lama cu fete plane si paralele

Este un dispozitiv utilizat pentru a obtine N unde coerente care interfera. Este alcatuit dintr-o lama transparenta cu fete plan-paralele. Aceste fete (Σ_1 si Σ_2) sunt semiargintate (fig.6.7).

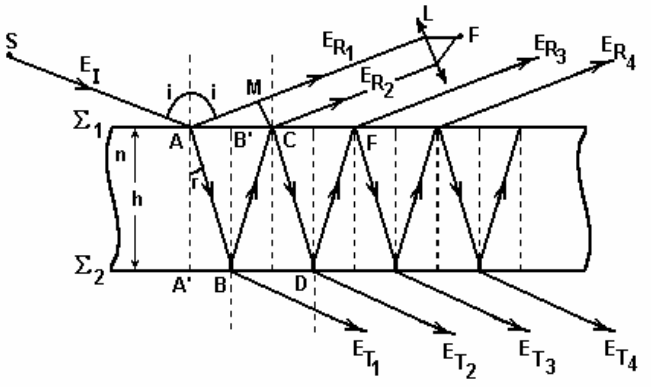


Figura 6.7

a) Interferenta a doua unde obtinute cu lama cu fete plan-paralele

În figura 6.7 este prezentata interferenta a doua unde E_{R1} si E_{R2} obtinuta în planul focal F a unei lentile L plasata în calea undelor. Unda incidenta E_I cade pe suprafata Σ_1 a lamei în punctul A, unde sufera fenomenele de reflexie (rezultând unda reflectata E_{R1}) si refractie (rezultând unde refractata AB). Aceasta unda

refractata ajunge pe suprafata Σ_2 în punctul B, unde sufera fenomenele de reflexie (rezultând unda reflectata BC) si refractie (rezultând unda transmisa E_{T1}). Unda reflectata BC ajunge pe suprafata Σ_1 în punctul C, unde sufera fenomenele de reflexie (rezultând unda reflectata CD) si refractie (rezultând unda refractata E_{R2}). Fenomenul se repeta, obtinându-se undele paralele $E_{R1;}$ E_{R2} ; E_{R3} ; E_{R4} ,…. si E_{T1} ; E_{T2} ; E_{T3} ; E_{T4} ,…, coerente, pentru ca toate provin de la aceeasi unda incidenta.

Pentru a studia interferenta undelor E_{R1} si E_{R2} este necesar sa se calculeze diferenta de drum dintre ele. In acest scop, se construieste perpendiculara pe aceste unde (CM); de la aceasta perpendiculara, pâna în focarul F nu mai apare nici o diferenta de drum. În acest caz, drumurile parcurse de cele doua unde vor fi:

- pentru raza refractata (se are în vedere ca drumul optic prin lama este egal cu produsul dintre drumul geometric si indicele de refractie al lamei):

$$r_1 = SA + nAB + nBC = SA + 2n\,AB = SA + 2n\frac{h}{\cos r} \qquad (6.49)$$

- pentru raza reflectata (tinem cont ca la reflexia unei raze pe suprafata unui mediu mai refringent decât mediul din care provine, apare o întârziere echivalenta cu o diferenta de drum egala cu λ /2):

$$r_2 = SA + AM + \lambda / 2 = SA + AC \sin i + \lambda / 2 =$$
$$= SA + 2h\,tg\,r \sin i + \lambda / 2 =$$
$$= SA + 2h\frac{\sin r}{\cos r}\sin i + \frac{?}{2} \qquad (6.50)$$

Rezulta:

$$? r = r_1 - r_2 = 2\frac{h}{\cos r}\left(n - \sin i \cdot \sin r\right) - \frac{?}{2} =$$
$$= 2\frac{h}{\cos r}\left(n - n\sin r \cdot \sin r\right) - \frac{?}{2} =$$
$$= \frac{2nh}{\cos r}\left(1 - \sin^2 r\right) - \frac{?}{2} = 2nh\cos r - \frac{?}{2} \qquad (6.51)$$

În acest caz se vor forma maxime când:

$$2nh\cos r - \frac{\lambda}{2} = 2p \cdot \frac{\lambda}{2}$$
$$2nh\cos r = (2p+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad (6.52)$$

si minime când:

$$2nh\cos r - \frac{\lambda}{2} = (2p+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$
$$2nh\cos r = (p+1) \cdot \lambda \qquad (6.53)$$

Din relatiile (6.52) si (6.53) se observa ca maximile si minimele provin de la unde care cad pe lama sub acelasi unghi de incidenta. Din acest motiv, franjele obtinute se numesc *franje de egala înclinare*. Sistemul de franje apare în planul focal al lentilei sub forma unui ansamblu de cercuri luminoase si întunecate, numite *inelele lui Heidinger*.

Fenomenul de interferenta apare si în cazul undelor transmise E_{T1} ; E_{T2} …. În aceasta situatie nu mai apare diferenta de drum de λ / 2, deci conditiile de maxim si de minim se vor inversa; rezulta ca unui maxim de lumina reflectata îi corespunde un minim în lumina transmisa si invers.

b) Interferenta a N unde obtinute cu lama cu fete plan-paralele

În acest caz se va calcula intensitatea undei transmise prin lama, daca se presupun cunoscuti coeficientii de reflexie r_1 si r_2 si coeficientii de transmisie t_1 si t_2, pentru suprafata Σ_1, respectiv Σ_2. În aceasta situatie factorul se reflexie al placii este:

$R = r_1^2 = r_2^2$; $R < 1$ (6.54)

si factorul de transmisie este:

$T = 1 - R = t_1 t_2$ (6.55)

Fie unda incidenta:

$$\vec{E} = \vec{E_0} e^{i\varphi_0} \quad (6.56)$$

Atunci amplitudinea fasciculului transmis de placa este:

$$\vec{E} = \sum_k \vec{E_{tk}} \quad (6.57)$$

unde unda transmisa k este data de:

$$\vec{E_{tk}} = \vec{E_0} T R^{k-1} e^{i[\varphi_0 + (k-1)\Delta\varphi]} \quad (6.58)$$

Aici $\Delta\varphi$ este defazajul dintre doua unde transmise adiacente. Relatia (6.57) devine:

$$\vec{E} = \vec{E_0} T e^{i\varphi_0} \left[1 + R e^{i\Delta\varphi} + \left(R e^{i\Delta\varphi} \right)^2 + ... \right] = \vec{E_0} T e^{i\varphi_0} \cdot \frac{1}{1 - R e^{i\Delta\varphi}} \quad (6.59)$$

Stiind ca $I = < \vec{E}^2 >$, rezulta ca intensitatea undei transmise prin lama este:

$$I = E_0^2 T^2 \cdot \frac{1}{1 + R^2 - 2R\cos\Delta\varphi} \quad (6.60)$$

Intensitatea este minima pentru $\Delta\varphi = (2p+1)\pi$, p=0,1,2,…

$$I = E_0^2 T^2 \cdot \frac{1}{(1+R)^2}$$

Pentru $\Delta\varphi = (2p + 1)\frac{\pi}{2}$, intensitatea este:

$$I = E_0^2 T^2 \cdot \frac{1}{1+R^2}$$

Intensitatea este maxima pentru $\Delta\varphi = 2p\pi$:

$$I = E_0^2 T^2 \cdot \frac{1}{(1-R)^2}$$

Un calcul analog se face si pentru analiza undei reflectate.

c) Dispozitiv interferential cu doua unde.
Lama cu fete plane si neparalele.

Este un dispozitiv utilizat pentru a masura unghiurile foarte mici dintre suprafetele plane. Este alcatuit dintr-o lama transparenta cu fetele plane si care fac un unghi mic α între ele (fig.6.8).

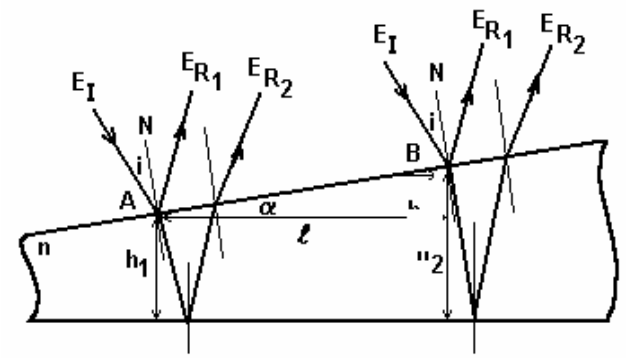


Figura 6.8

Pentru anumite grosimi ale lamei se vor observa maxime, iar pentru altele, minime. Deci franjele obtinute vor fi de egala grosime, adica în lungul unei franje, indiferent de forma acesteia, lama va avea aceeasi grosime. În cazul unei lame în

forma de pana - ca aceea din (fig.6.8) – franjele vor fi rectilinii, echidistante, paralele cu muchia penei.

Se considera ca la grosimea h_1 a penei se formeaza o franja luminoasa (fig.6.8). Daca observarea se face la incidenta normala, (i = 0, r = 0, cos r = 1) si în lumina reflectata, diferenta de drum dintre razele E_{R1} si E_{R2} satisfac conditia de maxim (vezi relatia 6.52) în punctul A:

$$\Delta r_1 = 2nh_1 - \frac{\lambda}{2} = 2p\frac{\lambda}{2} \qquad (6.61)$$

Se presupune ca urmatoarea franja luminoasa se formeaza în punctul B, la distanta l de punctul A. Conditia de maxim în punctul B este:

$$\Delta r_2 = 2nh_2 - \frac{\lambda}{2} = 2(p+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (6.62)$$

Din aceste ultime doua relatii se calculeaza grosimile lamei în cele doua puncte A si B:

$$\begin{cases} h_1 = \dfrac{(2p+1)\,\lambda}{4n} \\ h_2 = \dfrac{(2p+3)\,\lambda}{4n} \end{cases} \qquad (6.63)$$

de unde:

$$tg\alpha = \frac{h_2 - h_1}{l} = \frac{\lambda}{2nl} \qquad (6.64)$$

sau, pentru unghiuri foarte mici, unde este valabila aproximatia $tg\alpha \cong \alpha$, rezulta:

$$a \cong \frac{?}{2nl} \qquad (6.65)$$

Caz particular – Inelele lui Newton

Franje de egala grosime se obtin si în cazul în care lama transparenta este o pana de aer marginita de doua medii transparente, de indice de refractie n. Daca aceasta pana de aer are o simetrie de revolutie – de exemplu o lentila plan – convexa sprijinita pe o placa de sticla - se obtin franje în forma de cercuri concentrice, numite inelele lui Newton (fig.6.9)

Raza incidenta E_I cade pe fata BC a lentilei plan convexe, unde sufera o reflexie, rezultând raza E_{R1} si o refractie. Raza refractata traverseaza pana de aer, ajunge pe fata plana BD, unde se reflecta din nou. Aceasta ultima raza reflectata ajunge din nou pe fata BC a lentilei, unde sufera iar fenomenul de refractie, rezultând raza E_{R2}. Interferenta apare între E_{R1} si E_{R2}.

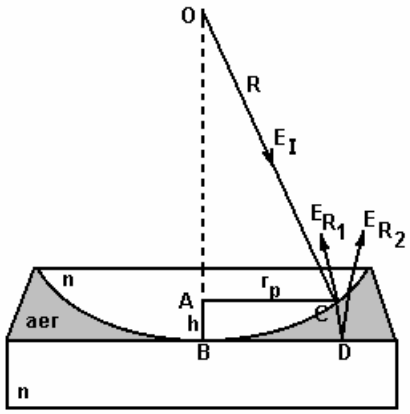


Figura 6.9

Prima unda este obtinuta prin reflexia pe suprafata mediu solid transparent – aer, deci nu exista salt de $\lambda / 2$. A doua unda este obtinuta prin refractia pe suprafata aer – mediu solid transparent, deci exista o întârziere de $\lambda / 2$. Relatia (6.51) devine:

$$? r = 2nhcosr + \frac{?}{2} \qquad (6.66)$$

Presupunând ca incidenta este aproape normala, (i = 0, r = 0, cosr = 1), rezulta:

$$? r = 2nh + \frac{?}{2} \qquad (6.67)$$

Din triunghiul OAC, se determina raza inelului de ordin p. Lentila plan-convexa este obtinuta dintr-o sfera de raza OC = OB = R. Grosimea penei de aer unde se obtine franja de interferenta de ordin p este: h = AB. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul OAC, rezulta:

$$R^2 = (R - h)^2 + r_p^2 \qquad (6.68)$$

Considerând grosimea h ca fiind foarte mica, se poate neglija termenul h^2. Atunci, din relatiile (6.67) si (6.68) se obtine:

$$2R\frac{? r - \frac{?}{2}}{2n} = r_p^2 \qquad (6.69)$$

de unde, raza inelului de ordin p este:

$$r_p = \sqrt{\frac{R}{n}\left(\Delta r - \frac{\lambda}{2}\right)} \qquad (6.70)$$

Daca între undele E_{R1} si E_{R2} exista o diferenta de drum $\Delta r = 2p\frac{\lambda}{2}$, atunci se obtine un maxim de interferenta, adica un *inel luminos*:

$$r_{p_{max}} = \sqrt{\frac{R}{n}(2p-1)\frac{?}{2}} \qquad (6.71)$$

Daca între undele E_{R1} si E_{R2} exista o diferenta de drum: $\Delta r = (2p+1)\frac{\lambda}{2}$, atunci se obtine un minim de interferenta, adica un *inel întunecat*:

$$r_{p_{min}} = \sqrt{\frac{R}{n} \cdot 2p\frac{\lambda}{2}} \qquad (6.72)$$

Pentru acelasi ordin p, se observa ca:

$$r_{p\,max} < r_{p\,min} \qquad (6.73)$$

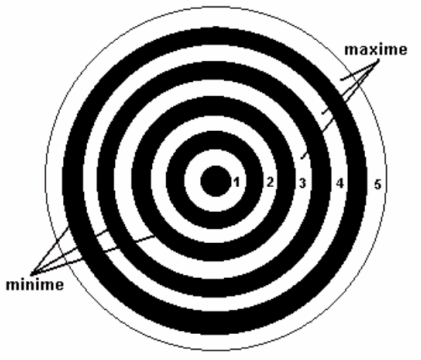


Figura 6.10

În centru se realizeaza contactul optic si $\Delta r = \frac{\lambda}{2}$ iar figura de interfe-renta prezinta o pata întunecata; apoi urmea-za inelul luminos de ordinul 1, apoi inelul întunecat de ordinul 1, inelul luminos de ordinul 2, inelul întunecat de ordinul 2, etc. Daca se studiaza acest fenomen de interferenta în lumina *transmisa*, inelele întunecate vor lua locul celor luminoase si invers.

PROBLEME

1. Avem N = 5 unde care interfera. Sa se determine: a) numarul de minime si de maxime secundare ce se gasesc între doua maxime principale; b)Intensitatea maximului principal; c) Intensitatea maximelor secun-dare.

Raspuns:

a) Pentru N = 5 unde care interfera, între doua maxime principale se vor gasi N-1= 4 minime si N-2 = 3 maxime secundare.

b) Intensitatea maximului principal este:

$I = N^2 I_o = 25 I_0$

c) Intensitatea maximelor secundare este:

- pentru p = 1

$$I_1 = I_0 \frac{25}{1 + 24 \cdot 9 \frac{\pi^2}{4 \cdot 25}} = I_0 \cdot \frac{25}{22,31} = 1,12\ I_o$$

- pentru p = 2

$$I_2 = I_0 \frac{25}{1 + 24 \cdot 25 \frac{\pi^2}{4 \cdot 25}} = I_0 \cdot \frac{25}{60,21} = 0,41\ I_o$$

- pentru p = 3

$$I_3 = I_0 \frac{25}{1 + 24 \cdot 49 \frac{\pi^2}{4 \cdot 25}} = I_0 \cdot \frac{25}{117,06} = 0,21\ I_o$$

2. Sa se determine raza inelelor luminoase si a celor întunecate în cazul în care în dispozitivul pentru observarea inelelor lui Newton se umple spatiul dintre lentila si placa cu un lichid al carui indice de refractie este mai mare decât al materialului solid transparent din care sunt facute lentila si placa.

Raspuns:

In aceste conditii relatia (6.67) devine:

$\Delta r = 2nh - \frac{\lambda}{2}$

Inelele luminoase vor avea razele:

$r_{p\,max} = \sqrt{\frac{R}{n}(2p+1)\frac{\lambda}{2}}$

iar cele întunecate:

$r_{p\,min} = \sqrt{\frac{R}{n}(2p+2)\frac{\lambda}{2}}$

CAPITOLUL 7. FIZICA NUCLEARA

7.1 Particule fundamentale

Particulele fundamentale reprezinta elemente structurale ale substantelor si câmpurilor, lipsite de structura interna, care se comporta ca entitati de sine statatoare în interactiile cu alte particule sau câmpuri si care au proprietati bine definite (masa de repaus, sarcina electrica, spin, etc.)

Tabelul 7.1. Particule fundamentale

Interacții	Particule		Simbol	Masa (MeV)		Durata medie de viață (s)
Electro-magnetice	Fotoni		γ	0		Stabil
Slabe	Leptoni		ν_e	Particule ușoare	$< 25\cdot10^{-5}$	Stabil
			ν_μ		< 2.5	Stabil
			$e^{\pm}$		~ 5.1	Stabil
			$\mu^{\pm}$		~ 105.6	$\sim 2.2\cdot10^{-6}$
Tari	Hadroni	Mezoni	$\pi^{\pm}$	Particule intermediare	~ 139.6	$\sim 2.5\cdot10^{-8}$
			π^0		~ 135	$\sim 2.2\cdot10^{-16}$
			$K^{\pm}$		~ 439.9	$\sim 1.2\cdot10^{-8}$
			K^0		~ 497.8	$\sim 1\cdot10^{-10}$
		Barioni	p	Particule grele	~ 938.2	Stabil
			n } N		~ 939.5	$\sim 1\cdot10^{3}$
			Λ		~ 1115.3	$\sim 2.5\cdot10^{-10}$
			Σ^+		~ 1189.4	$\sim 0.7\cdot10^{-10}$
			Σ^- } Σ		~ 1197.6	$\sim 1.6\cdot10^{-10}$
			Σ^0		~ 1193	$\sim 0.1\cdot10^{-10}$
			Ξ^- } Ξ		~ 1321.2	$\sim 1.7\cdot10^{-10}$
			Ξ^0		~ 1315	$\sim 2.8\cdot10^{-10}$
			Ω^-		~ 1686	-

Fiecarei particule îi corespunde o *antiparticula*, adica o particula cu aceeasi masa, spin, timp de viata, etc., dar cu sarcina electrica de semn opus (de exemplu: electronul e^- si pozitronul e^+, pionii π^+ si π^- , miuonii μ^+ si μ^- , etc.). Existenta antiparticulelor pune în evidenta simetria naturii fata de schimbarea semnului particulelor, cunoscuta sub numele de *principiul conjugarii de sarcina*. Acest principiu este valabil si pentru particule neutre (de exemplu: exista antineutroni, antineutrini, etc.).

7.2 Principalele caracteristici ale nucleului atomic

a) *Numarul atomic Z* este egal cu numarul de protoni, care este egal cu numarul de electroni într-un atom neutru.

b) *Numarul neutronic N* este egal cu numarul de neutroni.

c) *Numarul de masa A* este egal cu numarul de nucleoni (protoni si neutroni), adica cu suma dintre numarul atomic Z si numarul neutronic N.

d) *Sarcina electrica a nucleului* este pozitiva si egala cu produsul dintre numarul atomic Z si sarcina electrica elementara *e* în valoare absoluta.

e) *Masa nuclelui* este egala cu masa atomului din care se scade masa electronilor si masa corespunzatoare energiei de legatura (W/cm^2).

f) *Energia de legatura* se defineste ca diferenta dintre masa constituientilor unui nucleu si masa M a nucleului:

$$\Delta M = Z\, m_p + (A-Z) m_n - M(A,Z) \qquad (7.1)$$

unde m_p si m_n reprezinta masa protonului, respectiv a neutronului. Rezulta ca energia de legatura este:

$$\Delta E(A,Z) = c^2 \Delta M \qquad (7.2)$$

adica este energia necesara pentru a diviza nucleul în constituientii sai (protoni si neutroni) prin învingerea fortelor nucleare, astfel ca, în general $\Delta E(A,Z) < 0$.

g) *Energia medie pe nucleon* pentru un nucleu cu numarul de masa A este:

$$\varepsilon = \frac{\Delta E(A,Z)}{A} \qquad (7.3)$$

h) *Energia de separare* a unui singur nucleon este energia necesara pentru a îndeparta din nucleu particula cea mai slab legata. Energia de separare pentru neutron este:

$$S_n(A,Z) = m_n c^2 + M(A-1,Z)c^2 - M(A,Z)\,c^2 \qquad (7.4)$$

iar pentru proton:

$$S_p(A,Z) = m_p c^2 + M(A-1,Z-1)c^2 - M(A,Z)c^2 \qquad (7.5)$$

astfel încât:

$$S_n(A,Z) \approx S_p(A,Z) \qquad (7.6)$$

i) *Momentul cinetic (spinul) si momentul magnetic al nucleului* au fost postulate de Pauli pentru a explica structura hiperfina a liniilor spectrale. Fie $\vec{I}$ spinul nuclear si $\vec{M}_I$ momentul magnetic corespunzator. Despicarea hiperfina a liniilor spectrale se datoreaza interactiei dintre $\vec{M}_I$ cu $\vec{B}$ (inductia magnetica medie a electronilor din învelisul atomic). Spinul nuclear este:

$$\vec{I} = \vec{L} + \vec{S} \qquad (7.7)$$

unde $\vec{L}$ este rezultanta momentelor cinetice orbitale si $\vec{S}$ a celor de spin. Între cele doua momente exista legatura:

$$M = g\,I \qquad (7.8)$$

unde factorul de proportionalitate g este *factorul Landé*.
Momentul magnetic al protonului si al neutronului determinat experimental au valorile:

$$M_p = 2.793\ \mu_B \quad \text{si} \quad M_n = -1.913\ \mu_B \qquad (7.9)$$

Rezonanta magnetica nucleara (RMN) este utilizata pentru a detecta tranzitiile nucleare dintr-o stare caracterizata de o anumita orientare a momentelor magnetice, în alta, pentru nucleele situate într-un câmp magnetic omogen, prin aplicarea unui câmp magnetic oscilant rezonant slab.

7.3 Modele nucleare

Aceste modele folosesc pentru studierea nucleului atomic, datorita faptului ca nu exista pâna acum, o teorie completa si riguroasa.Pe baza modelelor nucleare se încearca sa se explice stabilitatea nucleelor, proprietatile lor radioactive, momentele electrice si magnetice, starile energetice, probabilitatile de tranzitie, sectiunile eficace de reactie, etc.

7.3.1 Modelul gazului Fermi

Nucleul este considerat un gaz Fermi degenerat de nucleoni. Miscarea independenta a nucleonilor se face într-o groapa de potential de raza $R=R_0A^{1/3}$, (unde $R_0=1{,}5\ 10^{-15}$m este raza de actiune a fortelor nucleare), respectându-se principiul de excluziune a lui Pauli. Fiecare nivel al gropii de potential, începând cu cel mai de jos, poate fi ocupat cu cel mult 2 nucleoni cu spin opus, ultima stare ocupata determinând nivelul Fermi nuclear (E_F). Numarul total de nucleoni cu impulsul $p < p_{max}$ este:

$$N = \frac{V p_{max}^3}{3\pi^2 \hbar^3} \qquad (7.10)$$

unde V este volumul nucleului. Pentru un nucleu simetric (N = Z):

$$p_{max} = \hbar \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = \hbar \left(\frac{9\pi^2 N}{4\pi R^3} \right)^{\frac{1}{3}} = \hbar \left(\frac{9\pi N}{4 R_0{}^3 A} \right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi N}{4A} \right)^{\frac{1}{3}} \qquad (7.11)$$

de unde rezulta energia nivelului Fermi ($p_{max} = p_F$):

$$E_F = p_F{}^2 / 2m \qquad (7.12)$$

unde m este masa nucleului.

Energia cinetica medie pe nucleon este:

$$< T > = \frac{\int_0^{p_F} E\, d^3p}{\int_0^{p_F} d^3p} \cong 30 MeV \qquad (7.13)$$

Rezulta ca adâncimea gropii de potential a nucleului este:

$$U_0 = T_{max} + \varepsilon \qquad (7.14)$$

unde ε este *energia medie de legatura pe nucleon*.

Contradictia dintre miscarea independenta a nucleonilor (admisa de acest model) si interactiile tari dintre nucleoni este rezolvata de principiul lui Pauli: interactiile tari nu-si manifesta efectul, ca urmare a faptului ca starile în care pot trece nucleonii prin împrastiere, sunt deja ocupate.

7.3.2 Modelul nuclear în paturi

Conform acestui model uniparticula, nucleonii sunt distribuiti în *paturi nucleare*. Fiecare nucleon se misca în câmpul creat de ceilalti nucleoni, câmp cu simetrie sferica, centrul de simetrie fiind identic cu centrul de inertie al nucleului. Paturile nucleare sunt formate din nucleonii din groapa de potential care se gasesc în aceleasi stari energetice sau în stari energetice apropiate. Fiecare nucleon este caracterizat de numerele cuantice n, ℓ si de spin egal cu ½.

Acest model explica satisfacator momentele cinetice, paritatea si momentele de dipol ale nucleelor în stare fundamentala sau slab excitata. Limitele modelului se observa la determinarea experimentala a unor momente de quadrupol si de spin mai mari decât cele obtinute teoretic, de existenta unei structuri energetice de rotatie în contradictie cu simetria presupusa sferica a câmpului, etc.

7.3.3 Modelul hidrodinamic al nucleului

În acest caz, fortele de interactie dintre nucleoni sunt considerate asemanatoare fortelor moleculare dintr-o picatura de lichid. Nucleul este considerat o picatura de substanta nucleara, încarcata electric si incompresibila. Pe baza acestui model se poate explica: densitatea aproximativ egala a tuturor nucleelor, deci se poate vorbi de o substanta nucleara care umple nucleul; caracterul de *saturatie* al fortelor nucleare, prin care se explica faptul ca un nucleon nu poate interactiona decât cu un numar limitat de nucleoni vecini; emisia de electroni care se aseamana cu un proces de evaporare; miscarea nucleonilor poate fi considerata similara miscarii de agitatie termica a moleculelor lichidului; fisiunea nucleara poate fi considerata similara instabilitatii unei molecule care vibreaza, etc.

Acest model nu poate explica însa starile excitate ale nucleeelor, periodicitatea proprietatilor acestora sau asimetria fisiunii nucleare.

7.3.4 Modelul generalizat al nucleului

În aceasta situatie, potentialul selfconsistent presupus sferic simetric în modelul paturilor nucleare trebuie sa depinda de interactia nucleonilor si de miscarea colectiva de vibratie si de rotatie a acestora. Structura starilor energetice a nucleelor este determinata atât de miscarea individuala, cât si de cea colectiva a nucleonilor excedentari.

Pe baza acestui model, se pot explica: dependenta momentului quadrupolar de Z si N, structura primelor stari excitate ale unor nuclee, valorile spinilor unor nuclee, spectrele de vibratie si de rotatie, etc.

7.4 Legile transformarilor radioactive

7.4.1 Legea deplasarii a lui Fajans-Soddy

Radioactivitatea reprezinta modificarea spontana a constitutiei interne si a energiei (sau numai a energiei) nucleelor aflate în stare fundamentala sau în stari metastabile, prin emisia de particule fundamentale sau a altor nuclee.

Radioactivitatea poate fi: *naturala* (în cazul izotopilor instabili naturali) sau *artificiala* (în cazul în care izotopii radioactivi rezulta în urma unor reactii nucleare). Exista urmatoarele tipuri de radioactivitate:

- dezintegrari α:

$$X(Z,A) \rightarrow \alpha(2,4) + Y(Z-2, A-4) \qquad (7.15)$$

- dezintegrari $\beta\pm$ si capturi electronice:

$$X(Z,A) \rightarrow \beta^{\pm}(1,0) + Y(Z\pm1, A) \qquad (7.16)$$

respectiv:

$$X(Z,A) + (e) \rightarrow Y(Z-1, A) \qquad (7.17)$$

- fisiunea spontana:

$$X(Z,A) \rightarrow 2Y(Z - \frac{1}{2}Z, A - \frac{1}{2}A) \qquad (7.18)$$

(în general asimetrica)

- radioactivitatea protonica (se emit unul, sau doi protoni):

$$X(Z,A) \rightarrow {}^{1}_{1}p + Y(Z-1, A-1) \qquad (7.19)$$

- radiatia γ (flux de fotoni având $\lambda=10^{-11}\div10^{-13}$ m care însoteste toate celelalte tipuri de activitate):

Dezintegrarile α si β reprezinta legile de deplasare a lui Fajans-Soddy.

7.4.2 Legea dezintegrarii radioactive

Aceasta lege ne arata rata de scadere a numarului N de nuclee care se dezintegreaza:

$$\frac{dN}{N} = -N\lambda = -\Lambda \qquad (7.20)$$

astfel ca prin integrare se obtine:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (7.21)$$

unde N_0 este numarul de nuclee la momentul initial. Constanta λ se numeste *constanta radioactiva* a unei specii si este probabilitatea dezintegrarii individuale în unitatea de timp a specii radioactive respective.

Marimea $\Lambda = N\lambda$ se numeste *activitate* si reprezinta numarul total de dezintegrari în unitatea de timp. *Timpul de înjumatatire* este timpul dupa care numarul initial de nuclee se reduce la jumatate si este egal cu:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \qquad (7.22)$$

Timpul de viata mediu este timpul dupa care fractia nedezintegrata este egala cu 1/e:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \qquad (7.23)$$

Unitatea de masura de masura a activitatii este 1 *curie*. O sursa are activitatea de 1 curie daca se produc $3{,}7 \cdot 10^{10}$ dezintegrari/secunda.

Daca pentru un nuclid exista mai multe moduri de dezintegrare competitive, având constantele λ_i, atunci *constanta totala de dezintegrare* este:

$$\lambda = \Sigma\lambda_i \qquad (7.24)$$

În multe cazuri exista lanturi de transformari radioactive. Fie N_1 numarul de nuclee, cu constanta λ_1. Acestea se dezintegreaza si se obtin N_2 nuclee, care au constanta λ_2. Rezulta:

$$dN_1(t) = -\lambda_1 N_1(t)dt \qquad (7.25)$$

$$dN_2(t) = \lambda_1 N_1(t)dt - \lambda_2 N_2(t)dt \qquad (7.26)$$

care admit solutiile:

$$N_2(t) = N_{2,0}\exp(-\lambda_2 t) + \frac{\lambda_1 N_{1,0}}{\lambda_2 - \lambda_1}[\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)] \qquad (7.27)$$

Deci se poate determina raportul $N_1(t)/N_2(t)$ dintre nuclidul generator si nuclidul derivat, la orice moment de timp. Exista 3 serii radioactive naturale si 1 serie radioactiva artificiala. denumirea lor provine de la nuclidul care le initiaza.

Tabel 7.2. Serii radioactive

Seria	**Denumirea**	**Simbolul**	**Elemente finale stabile**	**$T_{1/2}$ 10^6 (ani)**
A = 4n	Seria toriului	^{232}Th	^{208}Pb	13900
A = 4n+1	Seria neptuniului	^{237}Np	^{209}Bi	2,25
A = 4n+2	Seria uraniului	^{238}U	^{206}Pb	4510
A = 4n+3	Seria actiniului	^{235}U	^{207}Pb	707

7.4.3 Dezintegrarea a

Particulele α sunt atomi de heliu dublu ionizati. Acestea provin din nucleul atomic. Pâna acum se cunosc peste 25 de nuclizi naturali α-activi. În general sunt α-active nucleele care au A >200. De asemenea, exista foarte multi nuclizi arificiali α-activi.

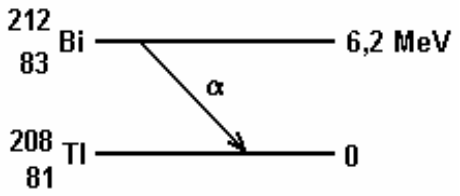


Figura 7.1

În figura de mai sus este reprezentata o diagrama energetica simplificata a dezintegrarii α pentru $^{212}_{83}$Bi, starea energetica "0" desemnând energia particulei α (fara energie cinetica) si cea a nucleului produs (de repaus). Aceasta tranzitie simpla are loc între starile fundamentale ale nucleelor generator (bismut) si derivat (taliu) prin emisia α. Dezintegrarea are loc spontan, daca este îndeplinita conditia:

$M(A,Z) > M(A-4, Z-2) + M(^4_2\ \alpha)$ (7.28)

Acest proces este însotit de eliberarea energiei de legatura. Între *parcursul* (energia) particulelor α (notat cu R_α) si constanta radioactiva exista urmatoarea legatura:

$\ln \lambda = A \ln R_\alpha + B$ (7.29)

unde constantele A si B sunt specifice fiecarei familii radioactive în parte.

7.4.4 Dezintegrarea b

Prin dezintegrarea β se obtin nuclee izobare având $Z' = Z \pm 1$. Emisia particulelor $\beta^\pm$ (pozitron sau electron) sau captura unui electron din învelisul atomic se face spontan ($T_{1/2}$ este cuprins între 10^{-2} s si 10^{15} ani), daca sunt îndeplinite conditiile:

pentru β^-: $M(A,Z) > M(A, Z+1) + m_e$ (7.33)

pentru β^+: $M(A,Z+1) > M(A, Z) + m_e$ (7.34)

pentru captura: $M(A,Z) < M(A, Z+1) + m_e$ (7.35)

Pentru anumite nuclee, aceste conditii pot fi satisfacute simultan, adica exista nuclee care pot suferi toate tipurile de transformari β, daca sunt respectate legile de conservare.

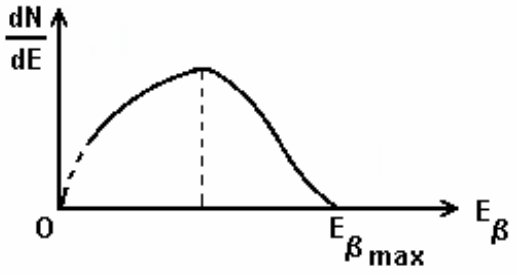


Figura 7.3

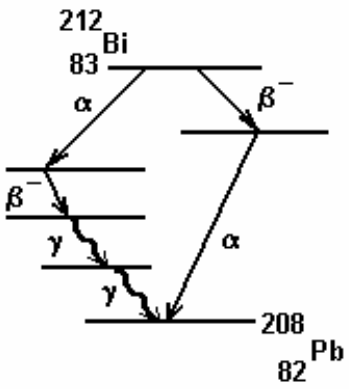


Figura 7.4

În natura exista peste 900 de izotopi β-radio-activi, dintre care aproximativ 180 sunt naturali. Spectrul energetic al particulelor β este continuu, în forma de clopot asimetric (vezi fig 7.3, unde dN/dE reprezinta numarul de particule β care au energiile cuprinse între E si E+dE). Continuitatea acestui spectru nu poate fi explicata prin analogie cu dezintegrarea α, cu toate ca s-a aratat ca energia $E_{\beta max}$ este determinata de diferen-ta energiilor nucleelor generator si derivat, aflate în stare fundamentala, deci particulele β emise ar trebui sa fie monoenergetice, dupa cum rezulta si din studiul dezintegrarii "bifurcate" a nucleului de $^{212}_{83}$Bi (fig. 7.4).

Acest lucru a fost explicat de catre Pauli, care a facut ipoteza ca, o data cu particula β, se mai emite o alta particula, numita neutrino, care preia o parte din energia de dezintegrare, astfel ca energia totala a dezintegrarii β este determinata de energiile electronului si neutrinului emisi. Netrino are sarcina nula, masa si momentul magnetic aproximativ nule si spinul 1/2.

În concluzie, din teoria dezintegrarii β se constata ca electronii si neutrinii nu exista în nucleu, ei fiind creati în procesul dezintegrarilor de acest tip, ca urmare a interactiilor nucleonilor cu câmpul electrono-neutrinic, deci sursele particulelor β sunt nucleonii.

7.4.5. Radiatia g

a) tranzitiile g radiative

Tranzitia γ consta în trecerea spontana a nucleului dintr-o stare excitata într-o stare mai putin excitata sau în starea fundamentala prin emisia unei cuante de radiatie electromagnetica cu $\lambda < 10^{-10}$ m.

Starile excitate ale nucleelor se obtin în urma diferitelor interactii (vezi figura 7.4). Spectrul radiatiei este discret, cuantele γ emise având un moment cinetic dat de: $\sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$, unde: $\left|I_i - I_f\right| < \ell < \left|I_i + I_f\right|$.

Un rol important în studierea tranzitiei γ îl au procesele de interactie: efectul fotoelectric, efectul Compton si formarea de perechi. Fiecare dintre acestea are o sectiune eficace caracteristica:

$$\sigma = \sigma_{fotoel} + \sigma_{Compton} + \sigma_{perechi} \qquad (7.36)$$

unde:

$$\sigma_{fotoel} \approx \frac{Z^5}{E_\gamma^{7/2}} \qquad \sigma_{Compton} \approx \frac{Z}{E_\gamma} \qquad \sigma_{perechi} \approx Z^2 \ln(2E_\gamma)$$

b) conversia interna

Învelisul electronic al atomului are un efect perturbator care conduce la modificarea probabilitatii de dezexcitare a nucleului. Aceasta creste datorita procesului competitiv, nerediativ, numit *conversie interna*. Prin conversia interna a radiatiei γ, nucleul transmite direct energia sa de excitare unuia dintre electronii care se gasesc pe paturile interioare ale învelisului electronic, conducând astfel la expulzarea electronului din nucleu.

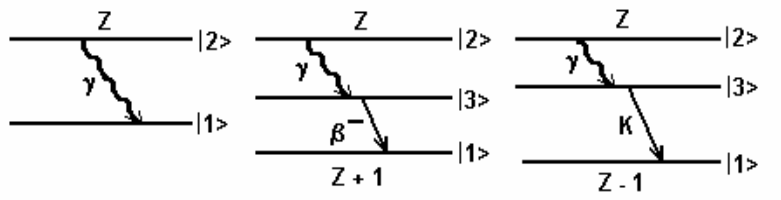
Daca numarul de electroni emisi prin conversie interna este N_c si numarul cuantelor γ emise radiativ în acelasi timp este N_γ, rezulta coeficientul de conversie interna:

$$\alpha = \frac{N_c}{N_\gamma} = \frac{N_c^K}{N_\gamma} + \frac{N_c^L}{N_\gamma} + \ldots = \alpha_K + \alpha_L + \ldots \qquad (7.37)$$

unde: α_K , α_L , … sunt coeficientii partiali de conversie interna pentru paturile K, L, …

c) Izomeria nucleara

Nuclizii izomeri sunt nuclizii care au aceeasi configuratie protono-neutronica, dar au alt timp de înjumatatire.Exista mai multe tipuri de tranzitii izomerice (fig 7.5):



a) directe cu unul (doi) fotoni γ

b) tranzitie γ - conversie interna sau dezintegrare β

c) tranzitie γ - captura K

Figura 7.5

d) efectul Mössbauer

Se poate calcula energia de recul a nucleelor în cazul tranzitiilor γ, pe baza legilor de conservare ale energiei si impulsului:

$$T_{nucleu} = E - E_\gamma \qquad (7.38)$$

$$\vec{p}_\gamma = \vec{P}_{nucleu} \qquad (7.39)$$

unde E este energia tranzitiei γ în absenta reculului. Rezulta:

$$T_{nucleu} = \frac{E_\gamma^2}{2M_{nucleu} \cdot c^2} \cong 5 \cdot 10^{-2} \text{ eV} \qquad (7.40)$$

Se vede ca T_{nucleu} este mult mai mare decat largimea naturala a liniei γ emise ($\sim 5 \cdot 10^{-7}$ eV) calculata pe baza relatiilor de incertitudine ($\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$), dar de acelasi ordin de marime cu largimea Doppler a liniei care este $\sim 7 \cdot 10^{-2}$ eV.

Aplicatiile cele mai importante ale efectului Mössbauer sunt: studiul despicarii hiperfine ale nivelelor nucleare, estimarile razelor nucleelor excitate, masurarea deplasarilor spre rosu, etc.

7.4.6. Radioactivitatea artificiala

În 1919, Rutherford a realizat prima transmutatie artificiala:

$$^{14}_{7}N + He \rightarrow H + {}^{17}_{8}O \qquad (7.41)$$

În 1936, sotii Curie au descoperit radioactivitatea artificiala bombardând nuclee de Al cu particule α:

$$^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{30}_{15}P^* \qquad (7.42)$$

$$^{30}_{15}P^* \rightarrow e^- + {}^{30}_{14}Si \qquad (7.43)$$

unde izotopul $^{30}_{15}P^*$ este instabil (2,55 minute).

S-au descoperit apoi radiofosforul, radioazotul si radioaluminiul. Exista radionuclizi cu exces de neutroni sau cu exces de protoni.

a) Radionuclizii cu exces de neutroni prezinta radioactivitate β^-, de exemplu:

$$^{17}_{7}N^* \rightarrow e^- + {}^{17}_{8}O^* + \nu \rightarrow {}^{17}_{8}O^* \rightarrow {}^{16}_{8}O + {}^{1}_{0}n \qquad (7.44)$$

$$^{3}_{1}H \rightarrow e^- + {}^{3}_{2}He + \nu \qquad (7.45)$$

sau radioactivitate neutronica, de exemplu:

$$^{17}_{8}O^* \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{16}_{8}O \qquad (7.46)$$

$$^{87}_{36}Kr^* \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{86}_{36}Kr \qquad (7.47)$$

radioactivitatea neutronica fiind specifica radioactivitatii artificiale.

b) Radionuclizii cu exces de protoni prezinta radioactivitate β^+, de exemplu:

$$^{1}_{1}p \rightarrow \beta^+ + {}^{1}_{0}n + \nu \qquad (7.48)$$

$$^{30}_{15}P \rightarrow \beta^+ + {}^{30}_{14}Si + \nu \qquad (7.49)$$

prin captura K (sau L):

$$^{7}_{4}Be + e^-(K) \rightarrow {}^{7}_{3}Li^* \rightarrow {}^{7}_{3}Li + h\nu(X) \qquad (7.50)$$

sau prin procese α (unii izotopi ai lantanidelor).

Uneori nuclizii radioactivi artificiali pot forma *lanturi de procese de dezintegrare*.

7.5. Reactii nucleare

7.5.1 Energia de dezintegrare nucleara

Reactiile nucleare sunt interactiile puternice dintre nuclee sau dintre nuclee si particulele elementare care au ca rezultat transformarea nucleelor initiale.

Schema unei reactii nucleare este X(a,b)Y unde X este nucleul initial, a este particula proiectil, b este particula emisa, iar Y este nucleul final. Interactiile nucleare pot fi clasificate astfel:

- de difuzie (daca particulele finale sunt aceleasi cu cele initiale)
- elastice (daca starile cuantice interne ale particulelor ramân aceleasi în urma interactiei)
- neelastice(daca starile cuantice interne ale particulelor nu ramân aceleasi în urma interactiei)
- reactii propriu-zise (daca particulele finale difera de cele initiale)
- directe (cu formarea nucleului compus)
- de captura
- reactii cu particule neutre (neutroni si fotoni),
- reactii cu particule încarcate (protoni, deuteroni, tritoni, etc),
- reactii de fisiune a nucleelor grele,
- reactii de fuziune sau termonucleare,
- reactii de producere a elementelor transuraniene.

Din legea de conservare a energiei scrisa în sistemul de referinta al laboratorului, se poate calcula energia de reactie:

$$Q=T_b+T_Y-T_a=(m_a+M_X)c^2-(m_b+M_Y)c^2 \qquad (7.51)$$

Reactia este *exoenergetica* daca Q > 0; se poate produce pentru orice energie a particulei proiectil, dar nu mai mica decât cea necesara învingerii barierei coulombiene. Reactia este *endoenergetica* daca Q < 0; se poate produce doar când:

$$T_a > (m_b + M_Y)c^2 - (m_a + M_X)c^2 \qquad (7.52)$$

Se poate arata ca:

$$(T_a)_{min} = \frac{M_X + m_a}{M_X}|Q| \qquad (7.53)$$

unde $(T_a)_{min}$ este *energia cinetica a pragului de amorsare a reactiei.*

Energia cinetica a particulelor se conserva doar în cazul difuziei elastice. Legea de conservare a impulsului se scrie, conform figurii 7.6, pentru cazul nerelativist:

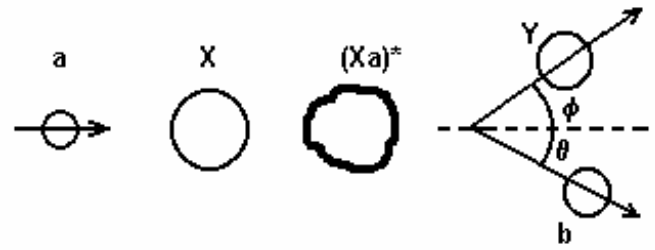


Figura 7.6

$$\sqrt{2m_a T_a} = \sqrt{2M_b T_b}\cos\theta + \sqrt{2M_Y T_Y}\cos\phi \qquad (7.54)$$

$$0 = \sqrt{2M_b T_b}\sin\theta + \sqrt{2M_Y T_Y}\sin\phi \qquad (7.55)$$

unde θ si ϕ sunt unghiurile pa care le fac cu directia particulei proiectil, vitezele particulelor Y, respectiv b.

Atunci, energia de dezintegrare nucleara este:

$$Q = T_b\left(1+\frac{M_b}{M_Y}\right) - T_a\left(1-\frac{M_a}{M_Y}\right) - \frac{\sqrt{M_a\,T_a\,M_b\,T_b}}{M_Y}\cos\theta \qquad (7.56)$$

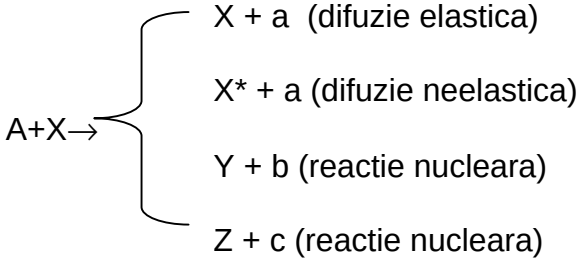
independenta de mecanismul de reactie.

7.5.2 Mecanismul reactiilor nucleare

a) Reactii cu formarea nucleului compus

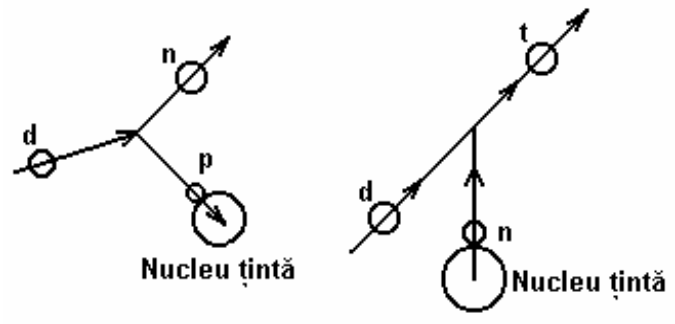
În figura 7.6 a fost prezentata o astfel de reactie. Reactiile nucleare se desfasoara în doua etape: patrunderea particulei proiectil în nucleul tinta cu formarea nucleului compus si dezintegrarea nucleului compus în particulele finale ale reactiei. Aceste etape sunt independente: modul de dezintegrare a nucleului compus nu este conditionat de felul în care s-a format.

Diferitele tipuri de interactie sunt:



b) Reactii nucleare directe

Exista reactii care se produc direct prin transfer de nucleoni, fara etapa intermediara a formarii nucleului compus.



a) b)

Figura 7.7

In functie de felul în care are loc transferul de nucleoni, aceste reactii se clasifica în *reactii de patrundere* (fig. 7.7a) si *de extragere* (fig. 7.7b). In *reactiile de patrundere de tipul (d,n)*, protonul patrunde si este captat în nucleul tinta, desprinzându-se de neutron. Deci nucleul tinta polarizeaza deuteronul datorita fortelor electrice, iar acesta se despica în neutron si proton, unul dintre nucleoni fiind captat de nucleu. In *reactiile de patrundere de tipul (d,p)* procesul este asemanator celui anterior, particula captata fiind neutronul, care, spre deosebire de proton, nu mai trebuie sa învinga bariera coulombiana a nucleului. *Reactiile de extragere (d,t)* sunt reactii inverse celor anterioare. In aceste reactii, unul sau mai multi nucleoni sunt extrasi din nucleul tinta.

7.5.3 Reactii nucleare cu particule încarcate

Reactiile tipice sunt de tipul: (α, p), (p, α), (α, n), (p, n), (p, p), (p, d) si (p, γ). Forma barierei de potential coulombiana a nucleului pentru particulele încarcate a fost prezentata în figura 7.2, unde:

$$B_c = \frac{2Ze^2}{r} \qquad (7.57)$$

Deci particulele care au $T < B_c$, pot patrunde în nucleu prin efect tunel.

Daca particulele sufera o ciocnire nefrontala ($l \neq 0$), atunci exista si bariera centrifugala

$$B_c' = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}.$$

Daca se tine seama de efectele de ionizare, se defineste *functia de excitatie* sau *randamentul reactiei*: $Y(T) = \nu/N_0$, unde ν este numarul de interactii nucleare, T energia cinetica a particulelor incidente, iar N_0 fluxul de particule.

a) Reactii de tip (α, p) si (p, α)

Reactia de bombardare a azotului cu particule α (7.41) este o reactie de acest tip; de asemenea, si reactia:

$$^{10}_{5}B + \alpha \rightarrow P + ^{13}_{6}C \qquad (7.58)$$

Sursele de particule α pot fi constituite de nuclee radioactive de poloniu.

În reactia (α, p) s-a demonstrat pentru prima data caracterul rezonant al dependentei sectiunii eficace de reactie de energia cinetica a particulei proiectil (fig. 7.8). Reactia (p, α) sunt inverse reactiilor (α, p); ele pot fi obtinute cu protoni accelerati artificial. Un exemplu este urmatoarea reactie:

$$^{7}_{3}Li + p \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He \qquad (7.59)$$

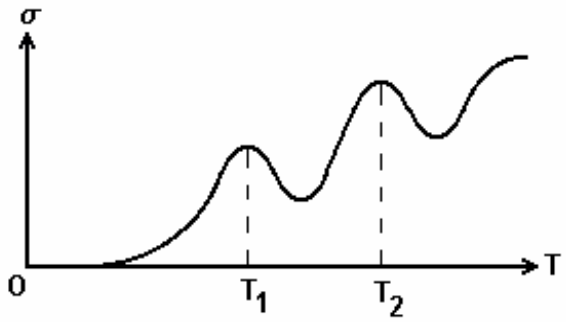


Figura 7.8

b) Reactii de tip (α, n)

Exemplul cel mai cunoscut îl constituie reactia care a condus la descoperirea neutronului:

$$^{9}_{4}Be + \alpha \rightarrow n + ^{12}_{6}C \qquad (7.60)$$

Reactia (α, n) este folosita în sursele de neutroni, de exemplu un amestec de heliu cu poloniu.

c) Reactii de tip (p, n), (p, p) si (p, d)

Reactiile (p, n) sunt endoenergetice si conduc la formarea de nuclee radioactive. Aceste reactii pot fi utilizate ca surse de neutroni. Ca exemple avem:

$$^{7}_{3}Li + p \rightarrow n + {}^{7}_{4}Be^* \qquad (7.61)$$

$$^{9}_{3}Be + p \rightarrow n + {}^{9}_{5}B^* \qquad (7.62)$$

Reactiile (p, p) au probabilitati comparabile cu cele (p, n) daca energia cinetica a protonilor proiectil depaseste înaltimea barierei. Reactiile (p, d) sunt de tipul:

$$^{9}_{4}Be + p \rightarrow d + ^{8}_{3}B^{*} \qquad (7.63)$$

d) Reactii de tip (p, γ)

Aceste reactii au un randament mic si conduc la formarea de nuclee stabile:

$$^{2}_{1}H + p \rightarrow \gamma + ^{3}_{2}He \qquad (7.64)$$

sau radioactive:

$$^{7}_{3}Li + p \rightarrow \gamma + ^{9}_{4}Be^{*} \qquad (7.65)$$

e) Reactii cu deuteroni

(d, γ): $^{1}_{1}H + d \rightarrow \gamma + ^{3}_{2}He$ (7.66)

(d, n): $^{10}_{5}B + d \rightarrow n + ^{11}_{6}C^{*}$ (7.67)

(d, p): $^{12}_{6}C + d \rightarrow p + ^{13}_{6}C$ (7.68)

(d, t): $^{2}_{1}H + d \rightarrow t + ^{1}_{1}H$ (7.69)

(d, α): $^{7}_{3}Li + d \rightarrow \alpha + ^{5}_{2}He^{*}$ (7.70)

(d, 2n): $^{65}_{29}Cu + d \rightarrow 2n + ^{65}_{30}Zn^{*}$ (7.71)

f) Reactiile cu tritoni

(t, γ): $^{1}_{1}H + t \rightarrow \gamma + ^{4}_{2}He$ (7.72)

(t, n): $^{2}_{1}H + t \rightarrow n + ^{4}_{2}He$ (7.73)

7.5.4. Reactii nucleare cu particule neutre

a) Reactii cu neutroni

Neutronii, neavând sarcina electrica, nu interactioneaza electromagnetic cu nucleele (bariera de potential coulombiana nu exista) si nu produc efecte de ionizare. In functie de energia acestora, putem face urmatoarea clasificare a neutronilor:

- *rapizi*, de la 1 la 20 MeV;
- *intermediari*, de la 1keV la 1 MeV;
- *de rezonanta*, de la 1 eV la 1 keV - interval în care sunt absorbiti rezonant;
- *epitermici*, de la 0,05 eV la 1 eV;
- *termici*, cu distributia maxwelliana a vitezelor, kT = 0.025 eV;
- *reci*, în echilibru termic cu substanta la temperaturi joase.

Avem urmatoarele exemple de reactii cu neutroni:

(n, γ): $^{115}_{49}In + n \rightarrow ^{116}_{49}In + \gamma$ (7.74)

(p, n): $^{32}_{16}S + n \rightarrow ^{32}_{15}P + p$ (7.75)

(n, 2n): $^{63}_{29}Cu + n \rightarrow ^{62}_{29}Cu + 2n$ (7.76)

(n, α): $^{10}_{5}B + n \rightarrow ^{7}_{3}Li + ^{4}_{2}He$ (7.77)

Pentru energii mari ($\cong$ 100 MeV), reactiile neutronice pot fi si directe (de extragere).

b) Reactii cu cuante γ (efectul fotonuclear)

Reactiile tipice sunt de forma (γ, n), (γ, p) si (γ, α). Pentru ca aceste reactii sa aiba loc, este necesar ca energia cuantelor sa fie mai mare decât cea de dezintegrare a nucleelor corespunzatoare. Reactia de fotodisociere a deuteronului este:

$$\gamma + ^{2}_{1}H \rightarrow n + p \qquad (7.78)$$

În cazul reactiilor (γ, n) si (γ, p) la energii înalte (2-10MeV), apar fenomene de "rezonanta gigant", adica maxime de rezonanta largi (3-6MeV). Daca aceste cuante au energii foarte mari (mai mari de 100MeV, $E_\gamma > 2mc^2$, unde: m = m_π, m_p, m_n, etc), reactiile conduc la *fotogenerarea* de particulelor.

7. 5. 5 Fisiunea nucleara

Caracteristicile fisiunii nucleare sunt:

- eliberarea unei cantitati mari de energie Q, în principal sub forma de energie cinetica a fragmentelor de fisiune, pentru fiecare nucleu fisionat;
- capacitatea fragmentelor de fuziune de a fi β-active si de a emite neutroni.

Un proces de fisiune poate fi reprezentat schematic astfel:

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A_1}_{Z_1}Y_1 + {}^{A_2}_{Z_2}Y_2 \qquad (7.79) $$

Pentru fiecare act de fisiune se obtine aproximativ:

$$ Q = [M_X - (M_1 + M_2)]c^2 = $$
$$ = \varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 - \varepsilon A = $$
$$ = (\varepsilon' - \varepsilon)A \cong 200MeV \qquad (7.80) $$

unde ε este *energia de legatura medie pe nucleon*.Din calcule rezulta ca energia de respingere coulombiana dintre fragmentele de fisiune este de acelasi ordin de marime cu energia de fisiune Q.

Procesele de fisiune sunt posibile doar pentru nucleele grele pentru ca acestea au un numar mare de protoni. Protonii determina forte coulombiene mari, deci bariera de potential de "spargere" a nucleului este relativ scazuta.

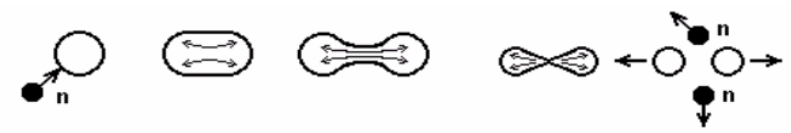


Figura 7.9

Fisiunea poate fi *spontana* sau *indusa*. Ambele tipuri de fisiuni pot fi explicate cu ajutorul modelului hidrodinamic al nucleelor. Astfel, se stabileste energia potentiala de fisiune U(r) pentru a arata posibilitatea fisiunii. În stadiul initial al fisiunii se iau în consideratie variatiile energiilor electrostatica (care este repulsiva si favorizeaza fisiunea) si superficiala (care se opune fisiunii) în cazul nucleelor deformate spontan sau prin captarea unui neutron (fig. 7.9).

Fie R raza nucleului sferic si a si b semiaxele nucleului deformat sub forma unui elipsoid de revolutie: a = R(1+ ε) si b = $\frac{R}{\sqrt{1+\varepsilon}}$. Volumul sferei ramâne constant dupa deformare (ε este un parametru empiric mic). *Energia de fisiune a nucleului deformat* este (dupa modelul hidrodinamic):

$$ U(r) = U_s + U_e = 0{,}014 \cdot A^{2/3}\left(1 + \frac{2\varepsilon^2}{5} + \dots\right) + $$
$$ +0{,}000627 \frac{Z^2}{A^{1/3}}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5} + \dots\right) \qquad (7.81) $$

unde U_S este *energia tensiunii superficiale a fragmentelor de fisiune*, iar U_e *energia de respingere coulombiana a fragmentelor de fisiune.*

Deoarece nucleul în stare nedeformata are energia U_0 (ε=0), din conditia $U_0 <$ U se obtine conditia de stabilitate:

$$ 6{,}27 \cdot 10^{-4} A^{2/3}(45 - Z^2/A) > 0 \qquad (7.82) $$

sau: $Z^2/A < 45$ (7.83)

raportul Z^2/A purtând numele de *parametrul fisiunii*.

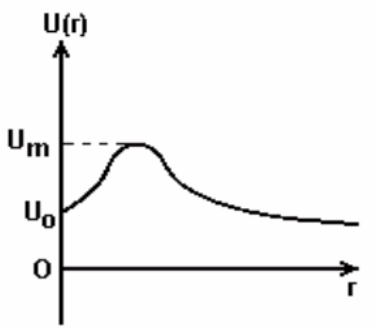


Figura 7.10

Pentru $Z^2/A > 45$ ($Z > 110$), U(r) are un maxim U_m (fig. 7.10). Diferenta

$$U_m - U_0 = E_f \qquad (7.84)$$

se numeste *energie de prag* sau *de activare* (E_f) si determina bariera de potential a nucleului pentru fisiune.

La scindarea simetrica a nucleului ($Z_1 = Z_2 = Z/2$) rezulta:

$$U_0 \sim [m(Z, A) - 2m(Z/2, A/2)]$$

$$\sim A^{2/3}[Z^2/A - 15{,}6] \qquad (7.85)$$

Daca $Z^2/A < 15$ ($Z < 35$), U_0 este negativ, fisiunea este *endoenergetica* si nu reprezinta interes practic.Daca $Z^2/A>15$, reactia de fisiune este *exoenergetica* (cu toate ca se consuma energie pentru activare) deci are importanta pentru producerea de energie nucleara.

Fisiunea spontana a fost observata la nucleele naturale: $^{235}_{92}U$, $^{238}_{92}U$ si $^{238}_{92}Th$, cu probabilitati foarte mici (timpi de viata medii mai mari de 10^{16}s) si la elementele transuraniene artificiale: $^{239}_{94}Pu$, $^{241}_{95}Am$, $^{252}_{98}Cf$, etc.

Fisiunea indusa

Aceasta se produce atunci când nucleele grele sunt bombardate cu diferite particule sau sub actiunea radiatiilor γ, daca energia lor este mai mare decât bariera de potential (de activare) a acestor nuclee. Deci:

- pentru fisiunea cu cuante γ

$$E_\gamma > E_f \qquad (7.86)$$

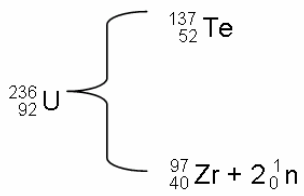
- pentru fisiunea provocata de neutroni

$$E = \varepsilon_n + T' > E_f \qquad (7.87)$$

unde ε_n este *cresterea energiei de legatura a neutronului în nucleu*, iar T ' *energia cinetica relativa a neutronului si nucleului*.

Reactiile de fisiune pot avea loc într-un numar mare de moduri de fragmentare a nucleului initial. De exemplu, pentru $^{235}_{92}U$ s-au identificat peste 120 de nuclizi apartinând la 34 de elemente de fisiune.

Nucleul compus de $^{236}_{92}U$ poate fisiona dupa urmatoarea schema:



Izotopul ^{137}Te este instabil în raport cu izotopul stabil ^{130}Te si se va dezintegra conform urmatoarei scheme:

$$^{137}Te \xrightarrow{\beta^-} {}^{137}I \xrightarrow{\beta^-} {}^{137}Xe \xrightarrow{\beta^-}$$

$$^{137}Cs \xrightarrow{\beta^-} {}^{137}Ba \text{ (stabil)} \qquad (7.88)$$

Energia de fisiune a ^{235}U este împartita în energia cinetica a fragmentelor de fisiune, a neutronilor de fisiune, a cuantelor γ instantanee, a particulelor β emise de fragmentele de fisiune, a radiatiilor γ a fragmentelor de fisiune si a antineutrinilor.

Reactia nucleara în lant

Aceasta relatie consta într-un proces în avalansa de fisionare a nucleelor prin utilizarea neutronilor produsi în actele de fisiune anterioare. Pentru ca reactia sa aiba loc, trebuie îndeplinite anumite conditii, sintetizate sub forma *factorului de multiplicare k*, definit ca numarul de neutroni lenti generati printr-un act de fisiune pentru fiecare neutron lent absorbit:

$$k = k_\infty \chi \qquad (7.89)$$

unde k_∞ este *factorul de multiplicare pentru un mediu infinit* si χ este un *coeficient* care ia în considerare pierderile în conditiile dimensiunilor date.

Factorul k_∞ este dat de:

$$k_\infty = \eta \varepsilon p f \quad \text{(formula celor 4 factori)} \qquad (7.90)$$

unde $\eta = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_t}$, η *numarul de electroni rapizi* produsi de un neutron lent, ν *numarul mediu al neutronilor rapizi de fisiune* pentru fiecare neutron lent care determina un act de fisiune, σ_f *sectiune eficace* si σ_t *sectiune totala de absorbtie a neutronilor prin fisiune si captura radiativa*, ε este *coeficientul de multiplicare* prin neutroni rapizi, p *probabilitatea de necaptare rezonanta* în procesul de moderare a neutronilor si f *coeficientul de utilizare* a neutronilor lenti.

Deci, pentru ca reactia nucleara în lant sa aiba loc, trebuie îndeplinita conditia $k > 1$. Acest lucru conduce la existenta unor dimensiuni critice ale masei fusionabile. De exemplu, primul reactor realizat de Fermi în 1942, diametrul a fost de 5 - 10m, , $k_\infty = 1{,}08$, $\chi > 0{,}93$, masa a fost de 3kg pentru ^{235}U si de 12kg pentru ^{239}Pu.

7.5.6 Fuziunea nucleara

Energia de fuziune nucleara

Reactiile nucleare sunt *exoenergetice* când se trece de la nuclizii cu energie de legatura pe nucleon mai mica la nuclizii cu energie de legatura mai mare. În acest fel a fost explicat caracterul puternic exoenergetic al reactiei de fisiune a nucleelor grele. O a doua posibilitate este oferita de nucleele usoare, care prin fuziune, sau sinteza nucleara (contopire în nuclee mai grele) pot elibera o cantitate mare de energie.

Reactiile tipice de fuziune nucleara în conditiile terestre sunt:

$$^2H + {}^2H \rightarrow {}^3He + {}^1n + 3{,}25 \text{ MeV} \qquad (7.91)$$

$$^2H + {}^2H \rightarrow {}^3H + {}^1H + 4 \text{ MeV} \qquad (7.92)$$

$$^3H + {}^2H \rightarrow {}^4He + {}^1n + 17{,}6 \text{ MeV} \qquad (7.93)$$

$$^3He + {}^2H \rightarrow {}^4He + {}^1H + 18{,}3 \text{ MeV} \qquad (7.94)$$

Cantitatile de energie eliberate în reactiile termonucleare se pot calcula cu relatia lui Einstein. De exemplu, pentru reactia (7.93) rezulta:

$$Q = \Delta mc^2 = [(m_d + m_t) - (m_{4He} + m_n)]c^2 =$$
$$= 0{,}018878u \cdot 931 = 17{,}58 \text{ MeV} \qquad (7.95)$$

respectiv:

$$Q = 2\varepsilon_d + 2\varepsilon_t - 4\varepsilon_{4He} = -17{,}6 \text{ MeV} \qquad (7.96)$$

Energia eliberata pe nucleon în reactiile fuziune nucleare este de aproximativ 3,5 MeV, fiind mult mai mare decât energia medie pe nucleon rezultata în reactiile de fisiune care este în jur de 0,85 MeV.

O importanta deosebita pentru studiul autoîntretinerii reactiei de fuziune sau pentru utilizarea energiei de fuziune o are repartitia energiei între produsii de reactie care se poate obtine pe baza legilor de conservare a energiei si impulsului. De exemplu, pentru reactia (7.93) rezulta: $E_n = 14{,}04$ MeV si $E_{He} = 3{,}25$ MeV.

Mecanismul reactiilor termonucleare

Reactia nucleara de fuziune are loc atunci când particulele de reactie depasesc bariera coulombiana, intrând în sfera atractiei hadronice mutuale. Din calcule, rezulta ca pentru depasirea barierei coulombiene sunt necesare energii ale deuteronilor mai mari de 100 KeV. Întrucât 1 KeV corespunde la $11{,}6 \cdot 10^6$ K, reactia de fuziune nucleara va fi posibila la temperaturi de aproximativ 10^9 K. Întrucât particulele au o distributie maxwelliana si conform teoriei lui Atkinson si Houtermans, interactia se poate produce si prin efect tunel, reactiile de fuziune pot avea loc si la temperaturi mult mai joase, cuprinse între 10^6 si 10^9 K.

La temperaturi corespunzatoare energiei de 10 KeV, gazul atomic este complet ionizat sub forma de plasma. Ca urmare a temperaturilor ridicate la care au loc reactiile de fuziune, acestea se mai numesc *reactii termonucleare.*

Atunci când energiile particulelor care fuzioneaza sunt mai mici decât bariera coulombiana, probabilitatea de strapungere a acesteia prin efect tunel este data de *factorul lui Gamow*:

$$G \sim \exp\{-[(2\pi Z_1 Z_2 e^2) / (4\pi \varepsilon_0 \hbar v)]\} \qquad (7.97)$$

v fiind viteza miscarii relative a acestora.

Factorul G se poate utiliza pentru calculul sectiunii eficace de reactie, functie de energia cinetica a miscarii relative E:

$$\sigma(E) = AE^{-1} \exp[-B E^{-1/2}] \qquad (7.98)$$

unde A si B sunt *constantele lui Gamow*. Energia eliberata în procesul de fuziune în timpul τ va fi:

$$E = R Q \tau \qquad (7.99)$$

unde Q este *energia rezultata într-un act de fuziune*, iar R *numarul de reactii de fuziune* pe unitatea de timp si de volum.

Autoîntretinerea reactiei de fuziune

Reactia de fuziune va fi autoîntretinuta daca deuteronii, având energii suficiente, se formeaza chiar în procesul de fuziune, dupa cum în reactia de fisiune, neutronii care provoaca fisiunea apar chiar în actele de fisiune. Energia eliberata prin fuziune trebuie sa compenseze, în primul rând pierderile prin radiatia de frânare sau prin emisia de neutroni rapizi, etc. Ca urmare, din conditia ca puterea de fuziune sa fie mai mare decât cea de pierderi, rezulta *conditia de amorsare a reactiei:*

$$T > T_S \qquad (7.100)$$

unde T_S este temperatura de prag a fuziunii. De exemplu, pentru de reactia (7.93) rezulta $T_S \cong 45 \cdot 10^6$ K.

Conditia 7.100 nu este suficienta, întrucât mentinerea temperaturii ridicate trebuie sa se faca un timp suficient de lung. Daca se tine seama de pierderi si de conditia:

$$R Q \tau > 3 n k T \qquad (7.101)$$

unde 3nkT este energia de încalzire a amestecului care fuzioneaza, se obtine criteriul lui Lowson de întretinere a reactiei termonucleare pentru deuteriu-tritiu:

$n\tau > 10^{14}$ s/cm^3 (7.102)

pentru temperaturi corespunzând energiei de 10 KeV, care este o conditie de functionare a reactorului de fuziune. Pentru deuteriu-deuteriu se obtin conditii si mai restrictive. Problema care trebuie rezolvata, privind utilizarea energiei eliberata în reactiile termonucleare, consta în controlul acestor reactiei.

PROBLEME

1. Din nucleele unui element A, se formeaza prin dezintegrare nucleele altui element B, care este de asemenea radioactiv. Care este legea de variatie în timp a numarului de nuclee din elementul B daca proba radioactiva contine initial numai $N_A(0)$ nuclee ale elementului A. Se cunosc constantele de dezintegrare $?_A$ si $?_B$.

Raspuns:

Viteza de formare a elementului B este proportionala cu numarul de atomi existenti la un moment dat si a celor de tip A.

$$\frac{dN_B}{dt} = -l_B N_B + l_A N_A$$

Inlocuind în aceasta relatie pe $N_A = N_A(0)e^{-l_A t}$, avem:

$$\frac{dN_B}{dt} + l_B N_B = l_A N_A(0) e^{-l_A t}$$

Solutia generala a acestei ecuatii este suma solutiei ecuatiei omogene si a solutiei ecuatiei neomogene. Cele doua solutii sunt:

$$N_B = Ce^{-l_B t} \quad \text{si} \quad N_A = Ke^{-l_A t}$$

Introducându-le în ecuatia diferentiala se obtine:

$$K = \frac{l_A N_A(0)}{l_B - l_A} \quad \text{si} \quad N_B = Ce^{-l_B t} + \frac{l_A N_A(0)}{l_B - l_A} e^{-l_B t}$$

Punem conditia ca la t = 0 sa avem $N_B(0) = 0$ si obtinem

$$C = -\frac{l_A N_A(0)}{l_B - l_A}$$

de unde rezulta

$$N_B = \frac{l_A N_A(0)}{l_B - l_A}\left(e^{-l_A t} - e^{-l_B t}\right)$$

2. Radioizotopul RaA se dezintegreaza cu un timp de înjumatatire T_A=3 min, formând RaB care se dezintegreaza la rândul sau cu un timp de înjumatatire T_B=27 min. Presupunând ca initial preparatul continea doar RaA, sa se determine dupa cât timp cantitatea de RaB va atinge un maxim.

Raspuns:

Folosind relatia finala dedusa în problema anterioara, pentru aflarea maximului punem conditia

$$\frac{dN_B(t)}{dt} = 0$$

de unde obtinem

$$t = \frac{\ln \frac{l_A}{l_B}}{l_B - l_A} = \frac{\ln \frac{T_B}{T_A}}{\left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A}\right)\ln 2} = 10{,}7s$$

Bibliografie

1	Bejan, A.	*Fizica*, Ed. All, Bucuresti, 1998
2	Gavrila, H., si altii	*Teoria moderna a câmpului magnetic si aplicatii*, Ed. All, Bucuresti, 1998
3	Gray, J.	*Idei despre spatiu*, Ed. All, Bucuresti, 1998
4	Halliday,D., Resnick,R	*Fizica*, Ed. Didactica si pedagogica, Bucuresti, 1975
5	Inta, I.	*Complemente de fizica*, Ed. Didactica si pedagogica, Bucuresti, 1985
6	Maxwell, J.C.	*Tratat elementar de electricitate*, Ed. Stiintifica si Enciclopedica, Bucuresti, 1989
7	Motoc, C.	*Fizica*, Ed. All, Bucuresti, 1998
8	Nicula, A.	*Rezonanta magnetica*, Ed. Didactica si pedagogica, Bucuresti, 1980
9	Novacu, V.	*Bazele teoretice ale fizicii,*Ed. Tehnica, Bucuresti, 1990
10	Popescu, I.M.	*Fizica,* Ed. Didactica si pedagogica, Bucuresti, 1982
11	Popescu, I.M., s.a.	*Culegere de probleme de fizica,* Ed. Didactica si pedagogica, Bucuresti, 1982
12	Schwab, A.	*Compatibilitatea electromagnetica*, Ed. Tehnica, Bucuresti, 1996